

П И С Ь М А
В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ
 ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД

ТОМ 64, ВЫПУСК 5
 10 СЕНТЯБРЯ, 1996

Письма в ЖЭТФ, том 64, вып.5, стр.305 - 308

© 1996г. 10 сентября

КВАНТОВОЕ РОЖДЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ С МИНИМАЛЬНОЙ
ЭНЕРГИЕЙ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

В.Ц.Гурович, У.М.Иманалиев, И.В.Токарева

Институт Физики АН Республики Кыргызстан

720071 Бишкек, Кыргызстан

Поступила в редакцию 17 июля 1996 г.

После переработки 29 июля 1996 г.

На основании уравнения Уилера–Девитта, зависящего от двух аргументов – масштабного фактора и потенциала скалярного поля, рассмотрено квантовое рождение закрытого Мира Фридмана. Волновая функция Вселенной (ВФ) в квазиклассическом приближении начинает эволюционировать при нулевом значении скалярного поля. Околопланковская плотность его энергии возникает в результате прохождения сквозь потенциальный барьер. Этот вариант сценария, по мнению авторов, наиболее адекватен рождению из "Ничего". Единственным параметром, управляющим квантовой эволюцией, является масса кванта скалярного поля. Расчет туннелирования через классически недоступную область суперпотенциала $U(a, \phi)$ осуществляется согласно авторам [1] инстантонным методом. Он требует, однако, выполнения специальных условий для $U(a, \phi)$ в пространстве a, ϕ . По этой причине ниже расчет туннелирования осуществляется с использованием метода характеристик для квазиклассического приближения уравнения Уилера–Девитта под барьером. Вдоль каждой из них используется хорошо разработанная для одномерных задач ВКБ-теория. Показано, что соответствующие точки поворота совпадают с $U(a, \phi) = 0$. Полная проникаемость барьера получается усреднением по пучку характеристик.

PACS: 04.60.-m

1. Квантовая эволюция Мира Фридмана описывается на основании уравнения Уилера–Девитта (УД). Наиболее полно исследован случай, когда этот этап эволюции происходит при постоянной плотности потенциальной энергии поля $V(\phi)$. При этом уравнение УД зависит только от масштабного фактора. Обзор этих работ приведен в [2–4]. В зависимости от выбора $V(\phi)$ волновая функция Вселенной эволюционирует над барьером либо просачивается под ним. При этом выбор $V(\phi)$ остается произвольным.

Нам представляется последовательным сценарий рождения Мира из "ничего" начать с нулевого скалярного поля. При этом одномерное уравнение УД при соответствующем выборе параметра упорядочения p дает внутреннюю классически доступную область и стационарный уровень энергии для закрытого Мира $E = 0$. В процессе просачивания волновой функции Вселенной сквозь барьер могут начать расти флуктуации скалярного поля. Последнее приведет к конечной ширине потенциального барьера и конечной вероятности его проницаемости. Важно, что при таком сценарии величина энергии скалярного поля определяется самим процессом, а не задается извне. Для рассмотрения такой задачи следует отказаться от одномерного уравнения УД, и рассмотреть его зависящим от двух аргументов - масштабного фактора a и потенциала скалярного поля ϕ . Ниже будет рассмотрен пример такой задачи для уравнения УД в квазиклассическом приближении, который позволяет найти аналитическое решение для такого сценария.

2. Уравнение УД в планковской системе единиц при параметре упорядочения $p = 1$ имеет вид

$$\Psi_{aa} - \frac{1}{a^2} \Psi_{\phi\phi} + \left(\frac{1}{4a^2} - a^2 + a^4 m^2 \phi^2 \right) \Psi = aE. \quad (1)$$

Уровень энергии E для закрытого Мира выбирается равным нулю, а волновая функция Вселенной под барьером ищется в виде

$$\Psi = \exp(-S(a, \phi)). \quad (2)$$

При этом уравнение в квазиклассическом приближении принимает вид

$$(S_a)^2 - \frac{1}{a^2} (S_\phi)^2 = U(a, \phi) = - \left(\frac{1}{4a^2} - a^2 + a^4 m^2 \phi^2 \right). \quad (3)$$

Это нелинейное уравнение первого порядка в частных производных может быть исследовано методом характеристик. Введем обозначения:

$$q = S_\phi, \quad F = \left[\frac{q^2}{a^2} + U(a, \phi) \right]^{1/2}. \quad (4)$$

При этом система уравнений характеристик имеет вид

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = -\frac{q}{a^2 F}, \quad \frac{dq}{dz} = -\frac{a^4 m^2 \phi}{F}, \quad \frac{dS}{da} = U(a, \phi)/F. \quad (5)$$

Идентификация области вне и под барьером для двумерного уравнения УД требует специального исследования [5]. Решение вдоль характеристик (5) определяет $\Phi(a)$, по этой причине функция Лагранжа, из которой следует уравнение УД, описывает систему с одной степенью свободы:

$$L = a + ((d\Phi/da)^2 - a)(da/d\tau)^2 - m^2 a^3 \Phi^2.$$

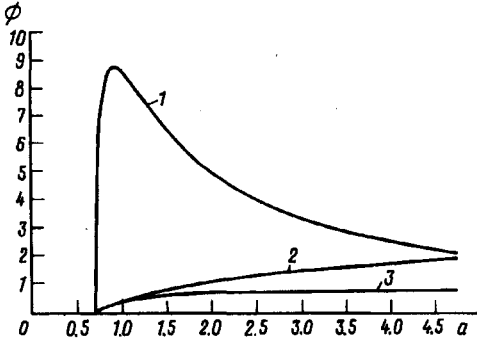
Соответствующий квадрат обобщенного импульса имеет вид

$$P_a^2 = 4(a^3 \Phi_a^2 - a)(a - m^2 a^3 \Phi^2).$$

Заменив производную $d\Phi/da$ системы (5) с учетом $q^2 \gg 1$, имеем

$$P_a^2 = -4(U a^2 / q^2)(a - m^2 a^3 \Phi^2) + O(1/q^4). \quad (6)$$

Согласно рассматриваемому сценарию, Вселенная начинает свою эволюцию при $\phi = 0$. Из (6) следует, что $P_a^2 < 0$ в этой точке и далее. Последнее соответствует решению под барьером. С ростом ϕ значение U уменьшается и в точке поворота ($U = 0$) решение выходит из-под барьера.



1 - граница классически доступной области, определяемая равенством нулю суперпотенциала $U(a, f)$ (см. (3)). 2 - неразличимый на рисунке пучок траекторий с начальными значениями $q_0 < S - 10$. 3 - характеристика при $q_0 = -10$. График построен для $m_0 = 0,1$

3. Перейдем к исследованию системы характеристик. Как видно из формы потенциала в уравнении УД (1), при $\phi = 0$ внутренняя классически доступная область расположена в интервале

$$0 < a < a_0 = 1/\sqrt{2}.$$

Решение уравнений для характеристик будем искать под барьером для $a > a_0$ с граничными условиями $a = a_0$, $S = 0$, $q = q_0$. Последнее означает, что от внешней границы классически доступной области под барьером проходит пучок характеристик с различными значениями начальной производной q_0 (см. (5)). Указанный пучок характеристик под барьером ограничен верхней предельной характеристикой, определяемой $q_0 \rightarrow -\infty$, и нижней, совпадающей при $q_0 \rightarrow 0$ с осью a в плоскости a, ϕ . При выходе каждой характеристики на границу внешней классически доступной области, где потенциал $U(a, \phi)$ в уравнении (5) вновь обращается в нуль, определяется значение поля ϕ_* и действие S_* . Проницаемость потенциального барьера на данной характеристике определяется выражением

$$D = \exp(-2S_*). \quad (7)$$

Численный анализ системы характеристик при указанных граничных условиях и $m \ll 1$ показывает, что при всех $|q_0| < 10$ проницаемость барьера (7) исчезающе мала. Это означает, что вклад этих траекторий в общую вероятность подбарьерного перехода крайне мал. Определяющий вклад в проницаемость барьера дает узкий пучок траекторий с $|q_0| \gg 1$. Это позволяет существенно упростить систему уравнений характеристик и получить аналитические решения:

$$F \simeq q/a, \quad \phi = \ln(a/a_0), \quad q = q_0 + O(1/q_0). \quad (8)$$

Граница внешней классически доступной области, на которую выходят характеристики с указанными граничными условиями, определяется из равенства нулю суперпотенциала в уравнении (5). Это условие на границе дает с достаточной степенью точности связь между масштабным фактором a_* и величиной потенциала ϕ_* : $a_*^2 m \phi_* = 1$. С учетом закона возрастания скалярного

потенциала вдоль характеристики (5) имеем

$$a_* m \ln(a_*/a_0) = 1. \quad (9)$$

Решение этого трансцендентного уравнения однозначно задает согласно системе характеристик и уравнений (8) значение всех параметров при выходе характеристики на границу внешней классически доступной области:

$$\phi_* = \ln(a_*/a_0), \quad S_* = (a_*^4/12 + ma_*^5(1 - ma_*/6)/18)/|q_0|. \quad (10)$$

Для иллюстрации, для массы кванта скалярного поля $m = 0.01$ и значения $|q_0| = 10^3$ имеем $a_* = 27.31$, $\phi_* = 3.7$, $S_* = 47$. Согласно (7), вклад этой траектории в проницаемость барьера пренебрежимо мал. При $|q_0| = 10^5$ значения a_* , ϕ_* остаются прежними, а значение действия S_* , согласно (10), уменьшается в 10^2 раз. Для такой траектории точность простой формулы (6) для проницаемости барьера недостаточна, и следует пользоваться обобщенной ВКБ - теорией [6], которая справедлива для большой проницаемости барьера:

$$D_* = \exp(-2S_*)/(1 + \exp(-2S_*)). \quad (11)$$

4. Расчет средней проницаемости барьера требует усреднения этой величины по всем характеристикам (траекториям), выходящим в плоскости a, ϕ из точки $a = a$, $\phi = 0$ и различными $|q_0| = \operatorname{tg} \alpha$ от 0 до $\pi/2$. При этом имеем

$$D = 2 \left[\frac{2}{\pi} \right] \int_0^{\pi/2} \frac{\exp(-2S(\alpha))}{1 + \exp(-2S(\alpha))} d\alpha. \quad (12)$$

Коэффициент 2 здесь учтен в связи с такой же эволюцией Мира при отрицательном потенциале ϕ . Поскольку заметный вклад в этот интеграл вносит только область вблизи верхнего предела, то для $S(\alpha)$ приближенно имеем

$$S(\alpha) = (a_*^4/12 + ma_*^5(1 - ma_*/6)/18)/\operatorname{tga}.$$

При этом средняя проницаемость барьера после вычисления интеграла (12) будет равна

$$D = 2 \ln 2 / (a_*^4/12 + ma_*^5(1 - ma_*/6)/18). \quad (13)$$

Таким образом, показано, что вероятность рождения Вселенной Фридмана из "ничего" при гипотезе малости скалярного поля в начальном квантовом состоянии однозначно определяется только массой кванта скалярного поля m . Размер Мира на начало классической инфляции определяется из уравнения (9).

Мы благодарны А.А. Старобинскому, И.М. Халатникову и рецензенту за обсуждения и замечания. Авторы благодарят Международный научный фонд Сороса (грант МУТ000) за поддержку данной работы.

1. И.М.Халатников, П.Шиллер, Письма в ЖЭТФ 57, 3 (1993).
2. А.Д.Линде, ЖЭТФ 87, 369 (1984).
3. Я.Б.Зельдович, А.А.Старобинский, Письма в АЖ 10, 323 (1984).
4. A.Vilenkin, Phys.Rev. D 30, 549 (1984).
5. Земляков А.Т., Письма в ЖЭТФ 58, 399 (1993).
6. Хединг Дж., Введение в метод фазовых интегралов, М.: Мир, (1965).