Письма в ЖЭТФ, том 64, вып.5, стр.313 - 318 © 1996г. 10 сентября

НОВАЯ ФАЗА В МОДЕЛИ НАМБУ-ЙОНА-ЛАЗИНИО ПРИ НЕНУЛЕВЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ХИМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

А.С.Вшивцев[1)], *К.Г.Клименко*[*1)]

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики
117454 Москва, Россия

Институт физики высоких энергий РАН
142284 Протвино, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 20 июня 1996 г.
После переработки 16 июля 1996 г.

Показано, что в модели Намбу-Йона-Лазинио при ненулевых значениях химического потенциала существуют две различные фазы со спонтанным нарушением киральной инвариантности, переход между которыми – фазовый переход второго рода. В одной из них плотность числа частиц отлична от нуля, в другой – тождественно равна нулю.

PACS: 11.10.Kk

Известно, что модели типа Намбу-Йона-Лазинио [1,2] (НИЛ) являются очень хорошей лабораторией для исследования такого непертурбативного явления, как спонтанное нарушение киральной инвариантности, а также для описания низкоэнергетической области квантовой хромодинамики. Вот почему уже более тридцати лет не ослабевает интерес к ним, причем особое внимание уделяется исследованиям структуры вакуума и его критическим свойствам при наличии окружающей среды, то есть учету таких факторов, как температура и ненулевая плотность частиц [3, 4], различные внешние поля [5], нетривиальная топология и кривизна пространства-времени [6] и т.д.

В предлагаемой работе проводится детальное исследование фазовой структуры четырехмерной модели НИЛ при ненулевых значениях химического потенциала μ. В отличие от других работ на эту тему [3, 4], мы обнаружили ранее неизвестную массивную фазу модели. Лагранжиан рассматриваемой модели имеет вид

$$L = \sum_{k=1}^{N} \bar{\psi}_k i\hat{\partial}\psi_k + \frac{G}{2N}[(\sum_{k=1}^{N} \bar{\psi}_k\psi_k)^2 + (\sum_{k=1}^{N} \bar{\psi}_k i\gamma_5\psi_k)^2] \tag{1}$$

и содержит N четырехкомпонентных спиноров Дирака для того, чтобы использовать непертурбативный метод $1/N$-разложения. Выражение (1) инвариантно относительно простейших непрерывных киральных преобразований

$$\psi_k \to e^{i\theta\gamma_5}\psi_k (k = 1, ..., N). \tag{2}$$

Для начала напомним свойства вакуума теории (1) при $\mu = 0$. С этой целью вместо (1) рассмотрим вспомогательный лагранжиан

$$\tilde{L} = \bar{\psi} i\hat{\partial}\psi - \bar{\psi}(\sigma_1 + i\sigma_2\gamma_5)\psi - \frac{N}{2G}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \tag{3}$$

(здесь ради простоты у ψ опущен индекс k, нумерующий ферми-поля), который на уравнениях движения для вспомогательных бозонных полей $\sigma_{1,2}$ эквивалентен исходному лагранжиану (1).

[1)] e-mail: alexandr@vvas.msk.ru; kklim@mx.ihep.su

Эффективное действие модели в главном порядке $1/N$-разложения определяется следующим образом:

$$\exp(iS_{eff}(\sigma_{1,2})) = \int D\bar{\psi}D\psi \exp(i\int \tilde{L}d^4x),$$

где

$$\frac{1}{N}S_{eff}(\sigma_{1,2}) = -\int d^4x \frac{\sigma_1 + \sigma_2^2}{2G} - i\ln\det(i\hat{\partial} - \sigma_1 - i\gamma_5\sigma_2). \tag{4}$$

Полагая здесь поля $\sigma_{1,2}$ не зависящими от координат пространства-времени, имеем по определению

$$S_{eff}(\sigma_{1,2}) = -V_{eff}(\sigma_{1,2})\int d^4x, \tag{5}$$

где $(\Sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$

$$\frac{1}{N}V_{eff}(\sigma_{1,2}) = \frac{\Sigma^2}{2G} + 2i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ln(\Sigma^2 - p^2) \equiv \frac{1}{N}V_0(\Sigma). \tag{6}$$

Переходя в (6) к евклидовой метрике ($p_0 \to ip_0$) и вводя лоренц-инвариантное обрезание области интегрирования ($p^2 \leq \Lambda^2$), получаем:

$$\frac{1}{N}V_0(\Sigma) = \frac{\Sigma^2}{2G} - \frac{1}{16\pi^2}\left\{\Lambda^4\ln\left(1 + \frac{\Sigma^2}{\Lambda^2}\right) + \Lambda^2\Sigma^2 - \right.$$
$$\left. - \Sigma^4\ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2}\right)\right\}. \tag{7}$$

Уравнение стационарности для функции (7) имеет вид

$$\frac{\partial V_0(\Sigma)}{\partial\Sigma} = 0 = \frac{N\Sigma}{4\pi^2}\left\{\frac{4\pi^2}{G} - \Lambda^2 + \Sigma^2\ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2}\right)\right\} \equiv \frac{N\Sigma}{4\pi^2}F(\Sigma). \tag{8}$$

Отсюда видно, что при $G < G_c = 4\pi^2/\Lambda^2$ уравнение (8) не имеет решений, кроме $\Sigma = 0$, то есть в этом случае фермионы безмассовы, и киральная инвариантность (2) не нарушена.

Если $G > G_c$, то у (8) появляется одно нетривиальное решение $\Sigma_0(G,\Lambda) \neq 0$ такое, что $F(\Sigma_0) = 0$. При этом в точке Σ_0 у потенциала $V_0(\Sigma)$ будет находиться глобальный минимум, что означает спонтанное нарушение киральной симметрии и появление у фермионов массы, равной $M \equiv \Sigma_0(G,\Lambda)$.

В дальнейшем при $G > G_c$ в качестве независимого параметра теории вместо G мы будем использовать массу ферми-частиц M. Уравнение стационарности (8) в этом случае позволяет выразить константу G в терминах M и Λ и получить для $V_0(\Sigma)$ следующее эквивалентное выражение

$$\frac{16\pi^2}{N}V_0(\Sigma) = \Sigma^2\Lambda^2 - 2\Sigma^2M^2\ln(1 + \Lambda^2/M^2) -$$
$$-\Lambda^4\ln(1 + \Sigma^2/\Lambda^2) + \Sigma^4\ln(1 + \Lambda^2/\Sigma^2). \tag{9}$$

Далее будем считать, что $\mu > 0$. Более того, давайте временно предположим, что на систему, описываемую лагранжианом НИЛ (1), оказывает влияние термостат с температурой T. В этом случае эффективный потенциал модели $V_{\mu T}(\Sigma)$ получается из (6) следующим преобразованием меры интегрирования

$$\int\frac{dp_0}{2\pi} \to iT\sum_{n=-\infty}^{\infty}, \quad p_0 \to i\pi T(2n+1) + \mu.$$

После суммирования в полученном выражении по n [7], то есть по частотам Мацубары, получаем эффективный потенциал при $\mu, T \neq 0$:

$$\frac{1}{N} V_{\mu T}(\Sigma) = \frac{1}{N} V_0(\Sigma) - 2T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln\{[1+$$

$$+\exp(-\beta(\sqrt{\Sigma^2 + \bar{p}^2} + \mu))][1 + \exp(-\beta(\sqrt{\Sigma^2 + \bar{p}^2} - \mu))]\}, \qquad (10)$$

где $\beta = 1/T$, а $V_0(\Sigma)$ представлен в (7)-(9). Устремим теперь в (10) T к нулю и проинтегрируем по импульсным переменным:

$$\frac{1}{N} V_\mu(\Sigma) = \frac{1}{N} V_0(\Sigma) - \frac{\Theta(\mu - \Sigma)}{16\pi^2} \left\{ \frac{10}{3} \mu (\mu^2 - \Sigma^2)^{3/2} - \right.$$

$$\left. -2\mu^3 \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2} + \Sigma^4 \ln\left[\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2} \right)^2 / \Sigma^2 \right] \right\}. \qquad (11)$$

Начиная с этой формулы, в статье предполагается, что $\Sigma \geq 0$. Это ограничение не приводит к потере общности рассмотрения, так как функция (10) четна по переменной Σ.

Мы будем исследовать потенциал (11) на абсолютный минимум только при $G > G_c$. В этом случае из (9) и (11) следует уравнение стационарности относительно Σ (M, Λ — свободные параметры):

$$\frac{\partial V_\mu(\Sigma)}{\partial \Sigma} = 0 = \frac{N\Sigma}{4\pi^2} \left\{ \Sigma^2 \ln\left[1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2}\right] - M^2 \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}\right) + \right.$$

$$\left. +\Theta(\mu - \Sigma)[2\mu\sqrt{\mu^2 - \Sigma^2} - 2\Sigma^2 \ln((\mu + \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2})/\Sigma)] \right\}. \qquad (12)$$

Пусть $\mu < M$ и $M << \Lambda$. Тогда при $\Sigma > \mu$ уравнение (12) по виду совпадает с уравнением стационарности для потенциала $V_0(\Sigma)$ (9) и, следовательно, имеет единственное решение $\Sigma_1 = M$. Если $\Sigma < \mu$, то (12) примет вид:

$$\Sigma f_\mu(\Sigma) \equiv \Sigma \left\{ 2\mu\sqrt{\mu^2 - \Sigma^2} - M^2 \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}\right) + \right.$$

$$\left. +\Sigma^2 \ln[(\Sigma^2 + \Lambda^2)/(\mu + \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2})^2] \right\} = 0. \qquad (13)$$

Нетрудно показать, что при $M \ll \Lambda$ функция $f_\mu(\Sigma)$ монотонно возрастает по переменной $\Sigma \in [0, \mu]$. Кроме того, очевидно, что $f_\mu(\mu) < 0$ при $\mu < M$, $f_\mu(\mu) > 0$ при $\mu > M$ и $f_\mu(\mu) = 0$ при $\mu = M$. Отсюда следует, что в случае $\mu < M$ единственным решением уравнения (13) является точка $\Sigma_2 = 0$. Таким образом, у потенциала (11) при $\mu < M$ существуют только две стационарные точки: $\Sigma_1 = M$ и $\Sigma_2 = 0$, причем в начале координат у него располагается локальный максимум в силу того, что $dV_\mu(\Sigma)/d\Sigma < 0$ на интервале $(0, \mu)$, а точка Σ_1 является точкой глобального минимума. Следовательно, при $\mu < M$ в модели НИЛ киральная симметрия (2) спонтанно нарушена, а фермионы имеют массу M.

Предположим теперь, что $M < \mu < \mu_{1c}(M)$, где

$$\mu_{1c}(M) = \left[\frac{M^2}{2} \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)\right]^{1/2}. \qquad (14)$$

Для таких значений химического потенциала, очевидно, выполнены соотношения $f_\mu(0) < 0$ и $f_\mu(\mu) > 0$. Это означает, что график монотонно возрастающей функции $f_\mu(\Sigma)$ (напомним: $M \ll \Lambda$) пересекает ось Σ в единственной точке

$\Sigma_3(\mu, M)$ такой, что

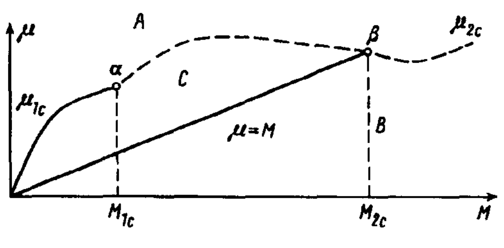
$$\Sigma_3(\mu, M) \to M \quad \text{при} \quad \mu \to M.$$

$$\Sigma_3(\mu, M) \to 0 \quad \text{при} \quad \mu \to \mu_{1c}(M). \tag{15}$$

Если к этому добавить, что в рассматриваемом случае точка $\Sigma_1 = M$ уже не является решением уравнения стационарности (12), а $\Sigma_2 = 0$ по-прежнему есть локальный максимум потенциала (11), то становится очевидным, что при $M < \mu < \mu_{1c}(M)$ модель НИЛ находится в фазе со спонтанно нарушенной киральной симметрией и с фермионами массы $\Sigma_3(\mu, M)$.

При $\mu > \mu_{1c}(M)$ у уравнений стационарности (12), (13) остается единственное решение $\Sigma_2 = 0$, на котором функция $V_\mu(\Sigma)$ достигает своего наименьшего значения, то есть при $\mu > \mu_{1c}(M)$ располагается безмассовая фаза модели (фаза А). В критической точке $\mu_{1c}(M)$ происходит переход из фазы с нарушенной киральной симметрией в симметричную фазу А, и переход этот – фазовый переход второго рода в силу того, что параметр порядка (масса фермионов) в критической точке $\mu_{1c}(M)$ является непрерывной функцией переменной μ (см.(15)).

Приведенные выше соображения и расчеты являются корректным доказательством того, что киральный фазовый переход в модели НИЛ – фазовый переход второго рода. К сожалению, в современной литературе критические значения параметров в различных теориях довольно часто вычисляются из предположения (иногда неправильного) о существовании фазового перехода именно данного типа (см.,например,[3,8]). Яркой иллюстрацией ошибочности такого подхода служит двумерная модель Гросса–Невье. В работах [8] было ошибочно показано, что величина $\mu_C = M/2$ является критическим значением химического потенциала, при котором восстанавливается киральная инвариантность. Еще раз подчеркнем, что это значение μ_C в [8] получено из априорного предположения о непрерывности параметра порядка (массы фермиона) в критической точке. На самом же деле критическая величина химического потенциала в этой модели есть $M/\sqrt{2}$ [9], а в этой точке происходит фазовый переход первого рода, где параметр порядка скачком изменяет свое значение.



Покажем теперь, что в состоянии с массивными кварками модель НИЛ может существовать в двух различных фазах. Для этого мы исследуем термодинамический потенциал (ТДП) системы $\Omega(\mu)$ в точке $\mu_{2c}(M) = M$. Как известно [10], критерием фазового перехода является наличие скачка какой-нибудь производной ТДП в критической точке. Пусть

$$\Omega(\mu) \equiv \begin{cases} \Omega_B(\mu) & \text{при} \quad \mu < M \\ \Omega_C(\mu) & \text{при} \quad M < \mu < \mu_{1c}(M). \end{cases} \tag{16}$$

Напомним, что ТДП есть значение эффективного потенциала в точке абсолютного минимума, то есть $\Omega_B(\mu) = V_\mu(M)$, $\Omega_C(\mu) = V_\mu(\Sigma_3(\mu, M))$. Приступим теперь к вычислению производных потенциалов $\Omega_B(\mu)$ и $\Omega_C(\mu)$ в точке $\mu = M$ и прежде всего отметим, что из (15) следует $\Omega_B(M) = \Omega_C(M)$. Далее, из (9)–(11) нетрудно получить, что

$$\Omega_B(\mu) = V_\mu(M) = V_0(M) =$$

$$= \frac{N}{16\pi^2}\left\{M^4 - M^4\ln(1+\Lambda^2/M^2) - \Lambda^4\ln(1+M^2/\Lambda^2)\right\}. \qquad (17)$$

Ясно, что $\Omega_B(\mu)$ не зависит от μ, поэтому все его производные тождественно равны нулю в области $\mu < M$, в том числе и при $\mu \to M_-$. Найдем первую производную функции $\Omega_c(\mu)$:

$$\frac{d\Omega_c(\mu)}{d\mu} = \left\{\frac{\partial V_\mu(\Sigma)}{\partial\mu} + \frac{\partial V_\mu(\Sigma)}{\partial\Sigma}\frac{\partial\Sigma}{\partial\mu}\right\}\Bigg|_{\Sigma=\Sigma_3(\mu,M)}. \qquad (18)$$

Так как Σ_3 является решением уравнения стационарности (12), то второе слагаемое в (18) сводится к нулю. При этом с учетом (11) получаем:

$$\frac{d\Omega_c(\mu)}{d\mu} = \frac{\partial V_\mu(\Sigma)}{\partial\mu}\Bigg|_{\Sigma=\Sigma_3} = -\frac{N}{3\pi^2}(\mu^2-\Sigma_3^2)^{3/2}. \qquad (19)$$

Если $\mu \to M_+$, то, в силу соотношения (15), выражение (18) обращается в нуль, и производная ТДП $\Omega(\mu)$ в точке $\mu = M$ — непрерывная функция. Для вычисления производных более высокого порядка от $\Omega_c(\mu)$ нам понадобятся следующие соотношения для производных функции $\Sigma_3(\mu, M)$, которые нетрудно получить из уравнения (13), задающего в неявном виде Σ_3 как функцию параметра μ:

$$\frac{d\Sigma_3}{d\mu} \equiv \Sigma_3' = \left\{\frac{\partial f_\mu(\Sigma)}{\partial\mu}\left[\frac{\partial f_\mu(\Sigma)}{\partial\Sigma}\right]^{-1}\right\}\Bigg|_{\Sigma=\Sigma_3} =$$

$$= -\frac{2\sqrt{\mu^2-\Sigma_3^2}}{\Sigma_3\{\ln[(\Sigma_3^2+\Lambda^2)/(\mu+\sqrt{\mu^2-\Sigma_3^2}\ )^2] - \Lambda^2/(\Sigma_3^2+\Lambda^2)\}}, \qquad (20)$$

$$\frac{d^2\Sigma_3}{(d\mu)^2} \equiv \Sigma_3'' = -\frac{2(\mu-\Sigma_3\Sigma_3')}{\Sigma_4\sqrt{\mu^2-\Sigma_3^2}\{\cdots\}} + O(\mu^2-\Sigma_3^2), \qquad (21)$$

где подразумевается, что в фигурных скобках в (21) стоит то же выражение, что и в фигурных скобках в (20). Очевидно, что $\Sigma_3' \to 0$ при $\mu \to M$, однако вторая производная Σ_3'' при $\mu \to M$ обращается в $(-\infty)$. Найдем теперь вторую и третью производные потенциала $\Omega_c(\mu)$. С учетом (20), (21) из (19) нетрудно получить

$$\frac{d^2\Omega_c(\mu)}{(d\mu)^2} = -\frac{N}{\pi^2}(\mu^2-\Sigma_3^2)^{1/2}(\mu-\Sigma_3\Sigma_3'), \qquad (22)$$

$$\frac{d^3\Omega_c(\mu)}{(d\mu)^3} = -\frac{N}{\pi^2}\frac{(\mu-\Sigma_3\Sigma_3')^2}{\sqrt{\mu^2-\Sigma_3^2}} - \frac{N}{\pi^2}\sqrt{\mu^2-\Sigma_3^2}\ (1-(\Sigma_3')^2-\Sigma_3\Sigma_3''). \qquad (23)$$

Выражение (22) при $\mu \to M$ обращается в нуль, однако третья производная ТДП $\Omega_c(\mu)$ при $\mu \to M$, как легко видеть из (23) и (21), становится бесконечно большой. Следовательно, в точке $\mu_{2c} = M$ ТДП $\Omega(\mu)$ имеет бесконечный скачок третьей производной. Это означает, что $\mu_{2c}(M)$ является критической точкой, которая отделяет фазу B системы (при $\mu < M$) от фазы C (при $M < \mu < \mu_{1c}(M)$). При $\mu = \mu_{2c}(M)$ в модели происходит фазовый переход второго рода. Основная физическая характеристика, по которой фазы B и C отличаются друг от друга — это плотность числа частиц:

$$n = -\partial\Omega(\mu)/\partial\mu. \tag{24}$$

С помощью (24) и (17) нетрудно показать, что в фазе B плотность частиц $n_B \equiv 0$. В фазе C (см.(19)) имеем:

$$n_c = \frac{N}{3\pi^2}(\mu^2 - \Sigma_3^2(\mu, M))^{3/2} \neq 0. \tag{25}$$

Таким образом в предлагаемой работе мы показали, что модель НИЛ (в случае $M << \Lambda$) при ненулевых значениях химического потенциала может существовать в трех различных фазах: в безмассовой симметричной фазе A, а также в двух массивных со спонтанно нарушенной киральной инвариантностью фазах B и C. В критических точках μ_{1c} и μ_{2c}, разделяющих фазы, происходят фазовые переходы второго рода. До сих пор считалось (см. [3,4]), что в модели НИЛ состояние с массивными фермионами представляет собой единую фазу системы (фазу B). Мы обнаружили новую, неизвестную ранее фазу C, в которой симметрия (2) спонтанно нарушена, а плотность частиц отлична от нуля (в фазе B плотность частиц равна тождественно нулю). Отметим также, что в двумерном и трехмерном вариантах модели НИЛ (модель Гросса-Невье) фаза C отсутствует [9,11].

В целях лучшего восприятия сказанного, мы приведем фазовую диаграмму изучаемой системы на рисунке. Из нее хорошо видно как существование новых фаз, так и наличие двух трикритических точек в данной системе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 95-02-03704-а.

---

1. Y.Nambu and G.Jona-Lasinio, Phys.Rev. **122**, 345 (1961).
2. В.Г.Вакс, А.И.Ларкин, ЖЭТФ **40**, 282; 1392 (1961); Б.А.Арбузов, А.Н.Тавхелидзе, Р.Н.Фаустов, ДАН СССР **139**, 345 (1961).
3. S.Kawati and H.Miyata, Phys.Rev. **D23**, 3010 (1981).
4. J.Fuchs, Z.Phys. **C22**, 83 (1984); V.Bernard, U.-G.Meissner and I.Zahed, Phys.Rev. **D36**, 819 (1987); Chr.V.Christov and K.Goeke, Acta Phys.Pol. **B22**, 187 (1991); D.Ebert, Yu.L.Kalinovsky, L.Münchow and M.K.Volkov, Int.J.Mod.Phys. **A8**, 1295 (1993).
5. D.Ebert and M.K.Volkov, Phys.Lett. **B272**, 86 (1991); S.P.Klevansky and R.H.Lemmer, Phys.Rev. **D39**, 3478 (1991); M.Faber, A.N.Ivanov, M.Nagy and N.I.Troitskaya, Mod.Phys.Lett. **A8**, 335 (1993).
6. T.Inagaki, T.Muta and S.D.Odintsov, Mod.Phys.Lett. **A8**, 2117 (1993); E.Elizalde, S.Leseduarte and S.D.Odintsov, Phys.Rev. **D49**, 5551 (1994); Phys.Lett. **B347**, 33 (1995); D.K.Kim and I.G.Koh, Phys.Rev. **D51**, 4573 (1995).
7. L.Dolan and R.Jackiw, Phys.Rev. **D9**, 3320 (1974).
8. B.J.Harrington and A.Yildiz, Phys.Rev. **D11**, 779 (1975); R.Dashen, S.-K.Ma and R.Rajaraman, Phys.Rev. **D11**, 1499 (1975).
9. В.А.Осипов, В.К.Федянин, ТМФ **73**, 393 (1987); К.Г.Клименко, ТМФ **75**, 226 (1988).
10. И.П.Базаров, Э.В.Геворкян, П.Н.Николаев, *Термодинамика и статистическая физика*, М.: Изд. МГУ (1986).
11. K.G.Klimenko, Z.Phys. **C37**, 457 (1988).