

МЕЖФАЗНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ ТЕЧЕНИИ КУЭТТА

С.А.Патлажан¹⁾

Институт химической физики РАН
142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 11 июля 1996 г.

Построена точная длинноволновая асимптотика задачи о межфазной устойчивости двухслойной системы ньютоновых жидкостей разной вязкости и малой глубины при течении Куэтта. Показано, что дисперсионное соотношение для комплексной скорости волны возмущений представляется в виде разложения по дробным степеням волнового числа, кратным 1/3. Найдены новые критерии устойчивости, отличные от полученных ранее. Построена физическая картина развития межфазных возмущений.

PACS: 47.20.Ma

1. Вопросы гидродинамической устойчивости стратифицированных вязких жидкостей при сдвиговых течениях возникают во многих практически важных приложениях (транспортировке нефти, переработке смесей несовместимых полимеров, геологии и т.д.) и требуют ясного понимания механизмов и условий развития возмущений на границе раздела слоев. Ранее отмечалось [1–5], что системы, состоящие из слоев различной вязкости, могут быть неустойчивыми под действием течения сдвига при малых числах Рейнольдса. Методом теории возмущений в длинноволновом приближении было показано [1,2], что при плоском течении Куэтта или Пуазейля граница раздела между двумя жидкими слоями будет неустойчивой при выполнении условия $(n^2 - m)(1 - m) > 0$, где $m = \mu_2/\mu_1$ и $n = d_2/d_1$ – отношения вязкостей и толщин слоев. При этом дисперсионное соотношение для комплексной скорости волны представлялось в виде ряда по целым степеням волнового числа α : $c = c_0 + i\alpha R c_1 + O((\alpha R)^2)$, где $R = \rho U d_1 / \mu_1$ – число Рейнольдса, ρ – плотность жидкостей, а U – некоторая характеристическая скорость. Подход, предложенный в работе [1], получил широкое распространение и активно применялся до настоящего времени для анализа режимов устойчивости различных гетерогенных жидких систем, включая неньютоновские жидкости (см., например, [3,4]). Однако анализ литературных данных выявляет ряд противоречий. В частности, предсказываемая неустойчивость плоского течения Пуазейля бинарной системы с равной толщиной слоев не согласуется с экспериментом [6]. В то же время, было замечено [5], что для плоского течения Куэтта тонкого и полубесконечного слоев разной вязкости имеет место совершенно иное дисперсионное соотношение: комплексная скорость представляется в виде разложения по дробным степеням волнового числа, кратным 1/3.

Отмеченные противоречия приводят к необходимости вновь вернуться к рассмотрению базовой проблемы о гидродинамической устойчивости системы, состоящей из двух конечных по толщине слоев ньютоновых жидкостей разной вязкости при течении сдвига.

¹⁾e-mail-адрес: sap@icp.ac.ru

2. В данной работе мы ограничимся рассмотрением плоского течения Куэтта двух жидкостей одинаковой плотности. Выберем систему координат с осью абсцисс x , лежащей вдоль невозмущенной границы между слоями. Пусть верхняя стенка покойится, а нижняя движется со скоростью $-U$. Это задает течение простого сдвига с базовыми скоростями $U_1(y) = U'_1 y + U_0$ и $U_2(y) = U'_2 y + U_0$, где $U'_1 = m/(m+n)$, $U'_2 = (1/m)$ U'_1 – градиенты скорости сдвига, а $U_0 = -n/(m+n)$ – скорость на границе раздела фаз. Индексы 1 и 2 обозначают характеристики нижнего и верхнего слоя, соответственно. Здесь и далее длины и скорости измеряются в единицах d_1 и U , соответственно.

Задача об устойчивости течения Куэтта двухслойной системы по отношению к малым периодическим вертикальным смещениям $\eta(x) = \xi \exp[i\alpha(x - ct)]$ на межфазной границе сводится к расчету собственных значений уравнений Оппа–Зоммерфельда [7]

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right)^2 \phi_1 = i\alpha R(U_1(y) - c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \phi_1, \quad (1)$$

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right)^2 \phi_2 = i\alpha R m^{-1}(U_2(y) - c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \phi_2, \quad (2)$$

для амплитуд $\phi_i(y)$ возмущений функций тока $\psi_i(x, y) = \phi_i(y) \exp[i\alpha(x - ct)]$ слоев. Функции $\phi_1(y)$ и $\phi_2(y)$ удовлетворяют условиям непроскальзывания жидкостей на внешних стенках:

$$\phi_1(-1) = \phi'_1(-1) = 0 \quad \text{и} \quad \phi_2(n) = \phi'_2(n) = 0. \quad (3)$$

Границные условия на межфазной поверхности, в свою очередь, определяются непрерывностью скоростей течений и касательных компонент напряжений, а также балансом нормальных компонент напряжений и поверхностного натяжения [1]:

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= \phi_2(0) = \phi(0), \\ \phi'_1(0) - \phi'_2(0) &= \frac{\phi(0)}{\bar{c}} \frac{1-m}{m}, \\ \phi''_1(0) + \alpha^2 \phi_1(0) &= m[\phi''_2(0) + \alpha^2 \phi_2(0)], \\ [\phi'''_1(0) - 3\alpha^2 \phi'_1(0)] - m[\phi'''_2(0) - \alpha^2 \phi'_2(0)] &= i\alpha^3 R_0 S \frac{\phi(0)}{\bar{c}}. \end{aligned} \quad (4)$$

здесь $\phi(0)$ – амплитуда возмущений функций тока на границе раздела. Она связана с амплитудой смещений поверхности ξ соотношением $\phi(0) = C_\phi \xi(c - U_0)$ [1] (C_ϕ – произвольная постоянная). В (4) приняты следующие обозначения: $\bar{c} = (c - U_0)/U'_1$, $R_0 = RU'_1$ и $S = \sigma/\rho d_1 U^2$, где σ – поверхностное натяжение между жидкостями, а штрих обозначает производную по y .

Вводя возмущения завихреностей слоев

$$\Omega_i(x, y) = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_i(x, y),$$

уравнения Оппа–Зоммерфельда можно переписать в терминах амплитуд завихреностей, $\omega_i(y) = -(d^2/dy^2 - \alpha^2)\phi_i(y)$:

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 - i\alpha R_0(y - \bar{c}) \right] \omega_1 = 0, \quad (5)$$

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 - i\alpha R_0 m^{-2} (y - m\bar{c}) \right] \omega_2 = 0, \quad (6)$$

которые, в свою очередь, легко привести к уравнению Эйри ($d^2/dz_i^2 - z_i$) $\omega_i = 0$ путем введения новых переменных

$$z_1(y) = (\alpha R_0)^{1/3} (y - \bar{c} + i\alpha R_0^{-1}) e^{\pi i/6},$$

$$z_2(y) = \left(\frac{\alpha R_0}{m^2} \right)^{1/3} (y - m\bar{c} + i\alpha m^2 R_0^{-1}) e^{\pi i/6}.$$

Отсюда видно, что решения уравнений (5) и (6) можно представить в виде линейных комбинаций $\omega_1(y) = a_1 A_{11}(y) + a_2 A_{12}(y)$ и $\omega_2(y) = a_3 A_{21}(y) + a_4 A_{22}(y)$ функций Эйри, $A_{k1}(y) = \text{Ai}(z_k(y))$ и $A_{k2}(y) = \text{Ai}(e^{2\pi i/3} z_k(y))$ для $k = 1, 2$. Общий вид решений для амплитуд возмущений функций тока определяется отсюда с помощью преобразования Лапласа:

$$\phi_1(y) = \frac{a_1}{\alpha} \int_{-1}^y \text{sh}[\alpha(z-y)] A_{11}(z) dz + \frac{a_2}{\alpha} \int_{-1}^y \text{sh}[\alpha(z-y)] A_{12}(z) dz, \quad (7)$$

$$\phi_2(y) = -\frac{a_3}{\alpha} \int_y^n \text{sh}[\alpha(z-y)] A_{21}(z) dz - \frac{a_4}{\alpha} \int_y^n \text{sh}[\alpha(z-y)] A_{22}(z) dz. \quad (8)$$

Выражения (7) и (8) удовлетворяют уравнениям Оппа–Зоммерфельда (1) и (2) и граничным условиям (3) на внешних стенках.

Подставляя (7) и (8) в условия (4) на межфазной границе, получим однородную систему линейных уравнений для коэффициентов a_k ,

$$\sum_{k=1}^4 M_{ik} a_k = 0,$$

с матрицей

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} J_{11}^s & \frac{1}{\alpha} J_{12}^s & \frac{1}{\alpha} J_{21}^s & \frac{1}{\alpha} J_{22}^s \\ J_{11}^c - \frac{1}{\bar{c}\alpha} J_{11}^s & J_{12}^c - \frac{1}{\bar{c}\alpha} J_{12}^s & J_{21}^c - \frac{1}{m\bar{c}\alpha} J_{21}^s & J_{22}^c - \frac{1}{m\bar{c}\alpha} J_{22}^s \\ 2\alpha J_{11}^s - A_{11} & 2\alpha J_{12}^s - A_{12} & m(2\alpha J_{21}^s + A_{21}) & m(2\alpha J_{22}^s + A_{22}) \\ M_{41} & M_{42} & m(2\alpha^2 J_{21}^c + A'_{21}) & m(2\alpha^2 J_{22}^c + A'_{22}) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} J_{1j}^s &= \int_{-1}^0 \text{sh}(\alpha z) A_{1j}(z) dz, & J_{1j}^c &= \int_{-1}^0 \text{sh}(\alpha z) A_{1j}(z) dz, \\ J_{2j}^s &= \int_0^n \text{ch}(\alpha z) A_{2j}(z) dz, & J_{2j}^c &= \int_0^n \text{ch}(\alpha z) A_{2j}(z) dz, \end{aligned} \quad (10)$$

$$M_{4k} = 2\alpha^2 J_{1k}^c - i\alpha^3 \frac{SR_0}{\bar{c}U_1^{1/2}} J_{1k}^s - A'_{1k}, \quad A_{ik} = A_{ik}(0), \quad A'_{ik} = A'_{ik}(0).$$

Нетривиальное решение существует, если определить матрицы M равен нулю. Это условие приводит к секулярному уравнению для определения собственных значений уравнений Оппа–Зоммерфельда (1) и (2).

3. В данной работе мы ограничимся рассмотрением длинноволнового приближения, при котором $\alpha \ll 1$ и $\alpha n \ll 1$. Кроме того, примем, что $\alpha \ll R_0$, $R_0 < \alpha^{-7/3}$. Раскладывая компоненты матрицы M в ряд по волновому числу и полагая $\alpha n^3 \ll 1$, приходим к следующему секулярному уравнению:

$$2[\text{Ai}'(0)]^2(m+n)[(m^2 + 3mn + 3mn^2 + n^3)\bar{c} + 2n^2(m-1)] + i(\alpha R_0)^{1/3}[\text{Ai}(0)]^2\bar{c} \times \\ \times \{[n^2(3m + 4mn + n^2) + m^{7/3}(m + 4n + 3n^2)]\bar{c} + 2n^2(m-1)(n + m^{4/3})\} = 0, \quad (11)$$

откуда нетрудно показать, что комплексная скорость волны возмущений представляется в виде разложения по дробным степеням волнового числа, $c = c_0 + i(\alpha R)^{1/3}c_1 + O((\alpha R)^{2/3})$, где

$$c_0 = \frac{2mn^2(1-m)}{(m+n)(m^2 + 3mn + 3mn^2 + n^3)} + U_0 \quad (12)$$

– скорость распространения волны возмущений, а

$$c_1 = 2 \left[\frac{\text{Ai}(0)}{\text{Ai}'(0)} \right]^2 \frac{m^{7/3}n^5(1-m)^2(m-n^2)(1-m^{1/3})}{(m+n)^{7/3}(m^2 + 3mn + 3mn^2 + n^3)^3} \quad (13)$$

– параметр устойчивости.

Полученные результаты в корне отличаются от решений, найденных в работе [1] путем применения теории возмущений непосредственно к уравнениям Оппа–Зоммерфельда. Первое различие проявляется в том, что комплексная скорость c зависит от дробных степеней волнового числа, кратных $1/3$, что согласуется с выводами для течения Куэтта при условии $\alpha n^3 \gg 1$ [2,5]. Кроме того, из (13) видно, что область гидродинамической неустойчивости задается неравенством $(m - n^2)(1 - m^{1/3}) > 0$, соответствующим положительным значениям c_1 . Отсюда следует, что течение Куэтта двухслойной системы с равной толщиной слоев будет устойчивым по отношению к длинноволновым возмущениям, что прямо противоположно полученному ранее выводу [1,2]. В то же время данный результат косвенно подтверждается поведением межфазной границы при плоском течении Пуазейля для малых R [6]. Основная причина расхождений с полученными ранее выводами обусловлена некорректностью представления функций тока в виде разложений по целым степеням α [1,2]. Такие решения не удовлетворяют уравнениям Оппа–Зоммерфельда, что видно из анализа соотношений (7) и (8) для малых α .

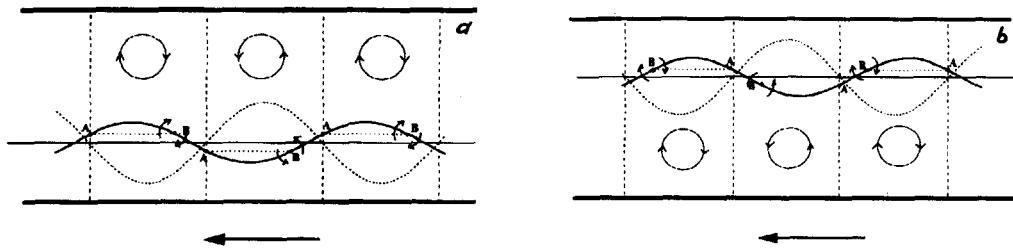
4. Помимо формальных математических выводов, до настоящего времени отсутствовала ясная физическая картина причин, вызывающих неустойчивость длинноволновых возмущений при течении сдвига. С этой целью рассмотрим поведение волн завихренностей слоев. Можно показать, что эти волны сдвинуты по фазе относительно волны смещений поверхности и могут быть представлены в виде $\Omega_k(x, y) = \omega_k(y) \exp[i\alpha(x - ct) - i\Delta_k(y)]$. На границе раздела жидкостей фазы нижнего и верхнего слоев, $\Delta_1(0)$ и $\Delta_2(0)$ совпадают и определяются выражением

$$\Delta = \Delta_1(0) = \Delta_2(0) = \frac{(m - n^2)(1 - m^{1/3})n(c_0 - U_0)}{2(m^2 + n^3)} \left[\frac{\text{Ai}(0)}{\text{Ai}'(0)} \right]^2 (\alpha R_0)^{1/3} + O(\alpha R_0), \quad (14)$$

а амплитуды завихреностей –

$$\omega_1(0) = mO_2(0) = -C_\omega \xi(c_0 - U_0) + O((\alpha R_0)^{2/3}), \quad (15)$$

где C_ω – постоянная.



Разные значения возмущений завихреностей (пунктирная кривая) в симметричных точках A и B цугов волны смещений границы раздела слоев (сплошная кривая) ведут к увеличению (а) или уменьшению (б) амплитуды возмущений. Круговые стрелки показывают направления циркуляций малых элементов объемов жидкости в приграничной области. Точки A соответствуют нулевым значениям возмущений завихреностей

Из (13) и (14) видно, что знак фазы Δ определяется соотношением знаков параметра устойчивости c_1 и относительной скорости распространения волны $c_0 - U_0$. Рассмотрим для определенности $m < 1$. В этом случае $c_0 - U_0 > 0$ (см. (12)). Тогда из (14) следует, что в режиме неустойчивого течения фаза Δ будет иметь тот же знак, а в режиме устойчивого течения – противоположный. Сдвиг волны завихрености по фазе приводит к тому, что завихренности в симметричных точках цугов волны смещений границы раздела будут различаться по величине. В результате, вращение малых элементов объемов жидкости в окрестности положительных (отрицательных) цугов волны завихренности против (по) часовой стрелки будет приводить к росту или затуханию амплитуды возмущений в зависимости от знака параметра устойчивости c_1 (см. рисунок). При $m = n^2$ фаза $\Delta = 0$, что соответствует симметричному положению волн смещений и завихреностей и не приводит к изменению амплитуды возмущений (режим нейтральной стабильности).

Автор благодарит Dr.J.T.Lindt за полезные дискуссии.

Работа была выполнена при финансовой поддержке Materials Research Center университета г. Питтсбург (США) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-03-33838а).

-
1. C.-S.Yih, J.Fluid Mech. **27**, 337 (1967).
 2. G.Yiantasios and B.G.Higgins, Phys. Fluids **A1**, 1484 (1989).
 3. A.A.Khan and C.D.Han, Trans. Soc. Rheol. **21**, 101 (1977).
 4. Y.-Y.Su and B.Khomami, J.Rheol. **36**, 357 (1992).
 5. A.P.Hooper, Phys. Fluids **28**, 1613 (1985).
 6. T.M.Kao and C.Park, J. Fluid. Mech. **52**, 401 (1972).
 7. P.G.Drazin and W.H.Reid, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.