Письма в ЖЭТФ, том 64, вып.7, стр.495 - 499 © 1996г. 10 октября

НАРУШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО РЕЖИМА ПРОТЕКАНИЯ ТОКА В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

А.М.Сатанин, В.В.Скузоваткин, С.В.Хорьков*

Нижегородский государственный университет
603091 Нижний Новгород, Россия

**Институт физики микроструктур РАН*
603600 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 28 августа 1996 г.

Показано, что в двумерных двухкомпонентных текстурах линейный режим протекания тока неустойчив при некоторых критических значениях отношения линейных проводимостей компонент. Изучены зависимости критического тока и критического поля от параметров системы. Обсуждается возможность экспериментального обнаружения предсказанного эффекта.

PACS: 71.30.+h, 73.50.Bk, 73.50.Fq

Двумерные неупорядоченные и периодические структуры с равными концентрациями проводящих компонент представляют собой системы, находящиеся в критической области, то есть на пороге фазового перехода металл – диэлектрик. Линейные характеристики таких систем зависят только от отношения линейных проводимостей компонент $h = \sigma_2/\sigma_1$. Используя дуальную симметрию структур, Дыхне [1] и Емец [2] нашли точную зависимость эффективной проводимости σ_e от параметра h. Причем, как для неупорядоченной системы, так и для периодической решетки эта зависимость имеет вид $\sigma_e = \sigma_1 h^{1/2}$ [1,2]. В работах [1,2] было показано, что усредненные по площади пленки одноточечные корреляторы поля $< \mathrm{e}^2 >$ и тока $< \mathrm{j}^2 >$ в таких системах расходятся при малых h как $\sim h^{-1/2}$. Такая зависимость позволяет отнести указанные системы к одному классу универсальности.

Представляет интерес обобщение полученных результатов на случай нелинейных случайных сред и нелинейных периодических структур. То, что нелинейные эффекты велики в критической области, было продемонстрировано экспериментально в работе [3], где было обнаружено аномальное поведение критического тока и критического поля нелинейности в неупорядоченных пленках Au вблизи перехода металл – диэлектрик в зависимости от концентрации металла. В теоретических работах [4–7] изучались нелинейные эффекты вблизи порога протекания. В работах [8,9] обсуждалось аномальное поведение нелинейной проводимости в неупорядоченных пленках в критической области и было показано, что нелинейная проводимость и связанные с ней корреляторы $< \mathrm{e}^4 >$ и $< \mathrm{j}^4 >$ расходятся при алых h. Критические свойства нелинейных текстур до последнего времени не изучались.

В данной работе показано, что в текстурах типа "шахматная доска" режим протекания тока принципиально отличается от случайной среды. Как оказалось, ввиду особенностей тока и поля вблизи углов линейный режим протекания тока разрушается при конечном значении параметра h. Это критическое значение h_c зависит от геометрии текстуры. Изучена зависимость критического поля нелинейности и критического тока от параметров системы.

Рассмотрим периодическую решетку, ячейки которой чередуются в шахматном порядке и имеют проводимости σ_1 (металл) и σ_2 (диэлектрик). В линейном приближении ток в компонентах описывается выражением

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}, \tag{1}$$

где σ – периодическая функция, принимающая значения σ_1 и σ_2. Ток и поле подчиняются уравнениям

$$\operatorname{div}\ \mathbf{j} = 0, \qquad \operatorname{rot}\ \mathbf{e} = 0 \tag{2}$$

и условиям непрерывности нормальных компонент тока и тангенциальных компонент поля на границах ячеек. Для двумерной решетки исходная система уравнений (2) допускает комплексное представление. С учетом периодической и инверсной симметрии задача об определении тока (или поля) сводится к однородной задаче Маркушевича [2] для двух аналитических функций $e_1(z)$ и $e_2(z)$ (здесь $z = x + iy$; система координат ориентирована вдоль сторон квадрата) в смежных ячейках. Как показано в работе [2], в случае квадратной решетки такая задача имеет точное решение. Приведем выражение для электрического поля в смежных ячейках ($i = 1, 2$):

$$e_i = c_i X(z) + d_i X^{-1}(z), \tag{3}$$

где

$$X(z) = \left[\frac{\operatorname{cn}(Kz/L, k)}{\operatorname{sn}(Kz/L, k)\operatorname{dn}(Kz/L, k)}\right]^{2\gamma}; \tag{4}$$

$\operatorname{sn}(.)$, $\operatorname{cn}(.)$, $\operatorname{dn}(.)$ – эллиптические функции Якоби, K – полный эллиптический интеграл с модулем k (для квадрата $k = 0.5$, $K = 1.8541$), L – длина стороны квадратной ячейки, c_i и d_i – некоторые константы. Параметр γ связан с h уравнением

$$\operatorname{tg}(\pi\gamma) = \frac{1-h}{2\sqrt{h}}, \qquad 0 \le \gamma \le \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Проанализируем общее решение. Первое и второе слагаемые в (3) представляют собой частные решения, которые соответствуют направлениям внешнего поля по разным диагоналям квадратной ячейки. Функция $X(z)$ вблизи противоположных вершин, расположенных в направлении внешнего поля, имеет особенности вида

$$X(z) \sim z^{-2\gamma}, \tag{6}$$

а в смежных углах

$$X(z) \sim z^{2\gamma}. \tag{7}$$

Функция $X(z)^{-1}$ имеет особенности в другой паре углов. Таким образом, при произвольном направлении внешнего поля общее решение имеет особенности во всех углах решетки. Так как электрическое поле вблизи углов велико, то необходимо с самого начала учесть влияние нелинейных эффектов.

В данной работе мы ограничимся приближением слабой нелинейности и учтем кубическое слагаемое в разложении тока по полю

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} + a\mathbf{e}^2\mathbf{e}. \tag{8}$$

Для среды с кубической нелинейностью эффективная нелинейная проводимость a_e определяется только полем в линейной среде

$$a_e = \frac{< ae^4 >}{< e >^4}. \tag{9}$$

Обоснование (9) приведено в работах [4,5]. Таким образом, для вычисления нелинейной проводимости необходимо решить уравнения (2) с учетом (1) и вычислить коррелятор (9).

Нелинейные эффекты в среде будут существенны, если в выражении, определяющем связь среднего тока $\mathbf{J} =< \mathbf{j} >$ и среднего поля $\mathbf{E} =< \mathbf{e} >$,

$$\mathbf{J} = (\sigma_e + a_e \mathbf{E}^2)\mathbf{E}, \tag{10}$$

слагаемые в скобках станут одного порядка. Определим критическое поле нелинейности E_c и критический ток нелинейности J_c выражениями $E_c = (\sigma_e/a_e)^{1/2}$, $J_c = \sigma_e^{3/2} a_e^{-1/2}$. Критическое поле и критический ток зависят от эффективных характеристики системы σ_e и a_e. Важно отметить, что согласно (9) a_e определяется двумя факторами. Перепишем (9) в виде

$$a_e = \frac{1}{2}(a_1 < e^4 >_1 + a_2 < e^4 >_2)/E^4. \tag{11}$$

Коэффициенты a_1 и a_2 зависят от условий теплоотвода, и возможны ситуации, когда они малы. Однако корреляторы полей $< e^4 >_1$ и $< e^4 >_2$ при некоторых значениях параметра h (или других параметров системы) могут иметь особенности. Рост корреляторов полей и является причиной аномального роста эффективной нелинейности структуры.

Используя приведенное выше решение (3), из (11) получим точное выражение для нелинейной a_e проводимости. Общий анализ выражения для a_e показывает, что величина нелинейной проводимости увеличивается с уменьшением h и, при стремлении h к некоторому пороговому значению h_c, ведет себя как

$$a_e = \frac{C}{h - h_c}, \tag{12}$$

где

$$C = \frac{\pi^2 (h_c^2 a_1 + a_2)(h_c + 1)^2}{4 I^4 \sqrt{h_c}}, \qquad I = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2} K \Gamma(7/8) \Gamma(5/8)}. \tag{13}$$

Из (5) для квадратной решетки получаем $h_c = (\sqrt{2} - 1)^2$. При значениях $h \le h_c$ интеграл для a_e расходится. Поясним природу расходимости. Из общего выражения для a_e нетрудно заметить, что аномальный рост нелинейной проводимости связан с ростом коррелятора $< e^4 >$, так как все остальные сомножители в формуле (11) конечны. Основной вклад в интеграл для $< e^4 >$ дают области вблизи особых углов с асимптотическим поведением решения $\sim z^{-2\gamma}$. Поэтому для оценки коррелятора при $h \to h_c$ достаточно рассмотреть малые окрестности этих точек, а точнее, окрестность одного особого угла в элементарной ячейке. При любом направлении внешнего поля решение в этой области имеет вид (6). На основе этих рассуждений получим

$$< e^4 > \sim \int\int |z|^{-8\gamma} dx dy \sim \int r^{-8\gamma+1} dr. \tag{14}$$

Интеграл (14) сходится при $\gamma \leq 1/4$. Из соотношения (5) следует, что при $h \geq h_c$ этот интеграл конечен. Чтобы определить степень расходимости интеграла (14) по $h - h_c$, разложим величину γ в показателе подынтегральной функции (14) в ряд по малому параметру $h - h_c$ и получим

$$< e^4 > \sim \int r^{-1+\mathrm{const}(h-h_c)} dr \sim \frac{1}{h - h_c} \qquad (15)$$

при стремлении h к h_c расходится лишь нелинейная проводимость, поэтому из формулы для E_c видно, что зависимость критического поля нелинейности вблизи h_c будет полностью определяться поведением a_e, то есть

$$E_c \sim \sqrt{h - h_c}. \qquad (16)$$

Из выражения для J_c следует, что критический ток имеет такую же особенность, как и критическое поле. Следует отметить, что для неупорядоченной пленки критическое поле и критический ток расходятся только при $h \to 0$ и имеют разные критические индексы (9).

Рассмотрим теперь, как меняются нелинейная проводимость a_e и критическое поле E_c при изменении геометрии структуры. Выясним, что произойдет в случае, если вместо решетки с прямоугольными ячейками взять решетку, составленную из ромбов (с острым углом α) с проводимостями α_1 и σ_2. При вычислении a_e основной вклад в интеграл для $< e^4 >$ по-прежнему дают области вблизи особых углов. Асимптотический вид поля вблизи угла можно получить из решения следующей вспомогательной задачи. Разобьем плоскость двумя прямыми, пересекающимися под острым углом α, на четыре области с проводимостями σ_1 и σ_2 и решим задачу о протекании тока в такой неоднородной структуре. Решение для скалярного потенциала $\varphi(r, \theta)$ (r, θ – цилиндрические координаты; центр системы координат выбран в точке пересечения прямых) имеет вид

$$\varphi^{(k)} = r^{-\lambda}\{A_k \cos(\lambda\theta + \theta)\}, \qquad (17)$$

где индекс k нумерует области, образованные пересечением прямых, $\lambda = 2\gamma - 1$. Электрическое поле обладает симметрией инверсии $e(x, y) = e(-x, -y)$, поэтому достаточно вычислить поле в двух соседних областях с проводимостями σ_1 и σ_2. Подставляя решение (17) в граничные условия, мы получаем однородную систему алгебраических уравнений, условие разрешимости которой дает показатель γ:

$$\mathrm{ctg}(\alpha\lambda/2)\mathrm{ctg}((\pi - \alpha)\lambda/2) = h. \qquad (18)$$

Используя полученное решение, нетрудно показать, что a_e и E_c зависят от $h - h_c$ аналогично случаю квадратной решетки, а значение h_c теперь определяется из уравнения

$$h_c = \mathrm{ctg}\left(\frac{\alpha}{4}\right) \frac{1 + \mathrm{tg}(\alpha/4)}{1 - \mathrm{tg}(\alpha/4)}. \qquad (19)$$

Из (19) следует, что величина h_c при отклонении угла α от $\pi/2$ начинает уменьшаться и область применимости линейной теории по параметру h расширяется. Проведенное исследование нетрудно обобщить на случай, когда в вершине угла сходится произвольное число чередующихся областей с проводимостями σ_1 и σ_2. Например, в случае гексагональной решетки критическое значение параметра $h_c = 7 - 4\sqrt{3}$.

Таким образом, периодическая решетка типа "шахматная доска" замечательна тем, что для нее удается в общем случае установить характер особенностей и проанализировать их роль в явлениях токопереноса. Как видно из точного решения, особенности высших моментов поля определяются асимптотическим поведением решений вблизи углов. Это свойство позволило нам обобщить результаты на случай решеток более общего вида. На существенную роль особенностей в случайных средах и периодических решетках указывалось в работах Дрейзена и Дыхне [10] и Бергмана [11]. В работе Барагурова [12] отмечалось, что в квадратной решетке эффективная проводимость имеет логарифмическую особенность в зависимости от концентрации проводящих компонент.

В настоящей работе обнаружено новое свойство двумерных решеток. Показано, что линейный режим протекания тока неустойчив при некотором критическом значении параметра h_c, то есть рассмотрение таких систем при $h \leq h_c$ в линейном приближении не оправдано. Этот эффект связан с особенностями поля и расходимостями высших моментов поля [11]. В работе вычислены критические значения h_c для разных типов решеток. Область параметров $h \leq h_c$ осталась за пределами нашего рассмотрения. В окрестностях особых углов структуры, где нарушается линейный режим протекания тока, для нахождения полей необходимо решать нелинейные уравнения.

Следует отметить, что экспериментальное изучение нелинейных эффектов в неупорядоченных и периодических структурах в зависимости от отношения линейных проводимостей может оказаться проще, чем изучение концентрационной зависимости [3]. Действительно, изменение параметра h нетрудно получить на одном образце, если, например, в качестве плохо проводящей компоненты взять полупроводник, обладающей большой фоточувствительностью. Тогда параметр h можно менять, поскольку он будет пропорционален интенсивности света. Нелинейные эффекты удобно наблюдать по генерации высших гармоник, которые пропорциональны моментам электрического тока [13].

1. А.М.Дыхне, ЖЭТФ **59**, 111 (1970).
2. Ю.П.Емец, ЖЭТФ **96**, 701 (1989).
3. Y.Gefen, W.H.Shih, R.B.Laibowitz, and J.M.Viggiano, Phys. Rev. Lett. **57**, 3097 (1986).
4. A.Aharony, Phys. Rev. Lett. **58**, 2726 (1987).
5. D.Stroud and P.M.Hui, Phys. Rev. **B37**, 8719 (1988).
6. R.Blumenfeld and D.J.Bergman, Phys. Rev. **B43**, 13682 (1994).
7. P.M.Hui, Phys. Rev. **B49**, 15344 (1994).
8. А.М.Сатанин, С.В.Хорьков, А.Ю.Угольников, Письма в ЖЭТФ **62**, 301 (1995).
9. А.М.Сатанин, Письма в ЖТФ **21**, 44 (1995).
10. Ю.А.Дрейзин, А.М.Дыхне, ЖЭТФ **84**, 1756 (1983).
11. D.J.Bergman, Phys. Rev. **B39**, 4598 (1989).
12. Б.Я.Балагуров, ЖЭТФ **79**, 1560 (1980).
13. А.А.Снарский, Письма в ЖТФ **21**, 3 (1995).