РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПИСЬМА В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ *ТОМ 64, ВЫПУСК 8*
ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД *25 ОКТЯБРЯ, 1996*

Письма в ЖЭТФ, том 64, вып.8, стр.515 - 520

ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ВОЛНОВОГО ПАКЕТА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

В.П.Быков

Институт общей физики РАН
117942 Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 сентября 1996 г.

Выведено уравнение для матрицы параметров гауссова волнового пакета, движущегося в произвольных заданных электромагнитных полях в случае, когда размеры пакета малы. Уравнение применимо к описанию эволюции волновых пакетов в широком классе вакуумных приборов. Рассмотрен простой пример эволюции пакета в постоянном магнитном поле.

PACS: 03.65.Sq, 41.90.+e

В работе [1] показано, что в вакуумных фотоприемных устройствах (таких, например, как фотоумножители) отдельные электронные волновые пакеты имеют относительно большие размеры и, следовательно, могут наблюдаться современными средствами. В [2-5] обсуждается вопрос о природе и механизме образования таких волновых пакетов, при этом показано, что причиной их образования является кулоновская неустойчивость квазиоднородного электромагнитного потока низкой плотности.

В связи с этим представляет интерес рассмотреть движение электронных волновых пакетов в электромагнитных полях достаточно общего вида при единственном условии (всегда выполненном в упомянутых выше приборах), что характерные размеры пространственного изменения этих полей значительно превышают характерные размеры пакетов. В этом случае поля внутри пакета и в его окрестности могут быть разложены в ряд и в расчетах учтены лишь члены нулевого, первого и второго порядков по отклонениям точек пакета от его центра. Оказывается, что в этом приближении центр пакета описывает классическую траекторию, а матрица параметров пакета подчиняется матричному уравнению типа Рикатти. Ниже дан вывод этого уравнения, отмечены его особенности и рассмотрен простой пример движения пакета в

однородном магнитном поле. В работах [6–9] рассмотрены частные случаи этого уравнения.

Гамильтониан, описывающий движение волнового пакета, имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 + eU(\mathbf{r}), \tag{1}$$

где $\mathbf{p},\mathbf{r}$ – импульс и координата электрона и $\mathbf{A}(\mathbf{r},t), U(\mathbf{r},t)$ – соответственно, векторный и скалярный потенциалы поля, являющиеся заданными функциями координат и времени. Как известно, из этого гамильтониана следуют обычные классические уравнения движения точечного электрона

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right), \qquad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{1}{2m}\operatorname{grad}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 - e\operatorname{grad}U(\mathbf{r}), \tag{2}$$

которые в ньютоновской форме имеют вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t)], \tag{3}$$

где

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \operatorname{grad}U(\mathbf{r},t), \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t), \tag{4}$$

– электрическое и магнитное поля, соответственно.

Как сказано выше, рассмотрим движение волнового пакета в электромагнитном поле в том случае, когда характерный размер неоднородности поля значительно превышает размеры этого пакета. С этой целью решение уравнения Шредингера будем искать в виде гауссова волнового пакета

$$\Psi(\mathbf{r},t) = C\exp\left[-(\vec{\rho}, F\vec{\rho}) + \frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_0(t)\vec{\rho} + E(t))\right], \qquad C = \left[(2/\pi)^3 \det \operatorname{Re}F(0)\right]^{1/4}, \tag{5}$$

где $F(t)$ – комплексная симметричная 3×3 матрица, и

$$\vec{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t); \tag{6}$$

параметры $\mathbf{r}_0(t)$ и $\mathbf{p}_0(t)$ описывают движение центра волнового пакета. При кулоновой калибровке

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = 0, \qquad \Delta U(\mathbf{r},t) = 0 \tag{7}$$

уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + eU(\mathbf{r}) - \frac{e}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r})\mathbf{p} + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2(\mathbf{r})\right]\Psi. \tag{8}$$

Подставив в это уравнение волновой пакет (5) и поделив его потом на то же самое выражение (5), получим в левой части уравнения Шредингера выражение

$$i\hbar\left[-(\vec{\rho}, \dot{F}\vec{\rho}) + 2(\dot{\mathbf{r}}_0, F\vec{\rho}) + (\dot{\mathbf{p}}_0\vec{\rho}) - \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{E})\right], \tag{9}$$

в котором можно видеть члены, не зависящие от $\vec{\rho}$, а также линейные и квадратичные по $\vec{\rho}$. Правую часть уравнения Шредингера, учитывая для скалярного и векторного потенциалов разложения

$$U(\mathbf{r}) \cong U(\mathbf{r}_0) + (\vec{\rho}\vec{\nabla})U(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2!}(\vec{\rho}\vec{\nabla})^2 U(\mathbf{r}_0),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cong A(\mathbf{r}_0) + (\vec{\rho}\vec{\nabla})A(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2!}(\vec{\rho}\vec{\nabla})^2 A(\mathbf{r}_0) + \ldots, \tag{10}$$

также можно представить в виде суммы членов, как не зависящих от $\vec{\rho}$, так и линейных и квадратичных по $\vec{\rho}$. Собирая члены, не содержащие $\vec{\rho}$, получим уравнение, определяющее функцию $E(t)$:

$$\dot{E} = \frac{1}{2m}\mathbf{p}_0^2 - eU(\mathbf{r}_0) - \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2(\mathbf{r}_0) - \frac{\hbar^2}{m}\mathrm{Sp}F. \tag{11}$$

Аналогично, собирая члены первого порядка по $\vec{\rho}$, получим для параметров $\mathbf{r}_0(t)$, $\mathbf{p}_0(t)$ гамильтоновы уравнения (2). Следовательно, центр волнового пакета движется по классической траектории. Члены второго порядка малости по $\vec{\rho}$ дают

$$-i\hbar(\vec{\rho}, \dot{F}\vec{\rho}) = \frac{2\hbar^2}{m}(\vec{\rho}, F^2\vec{\rho}) + \frac{1}{2}e(\vec{\rho}\vec{\nabla})^2 U(\mathbf{r}_0) - \frac{2ie\hbar}{mc}((\vec{\rho}\vec{\nabla})\mathbf{A}(\mathbf{r}_0))F\vec{\rho} -$$

$$-\frac{e}{2mc}(\mathbf{p}_0 - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}_0))((\vec{\rho}\vec{\nabla})^2\mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) + \frac{e^2}{2mc^2}((\vec{\rho}\vec{\nabla})\mathbf{A}(\mathbf{r}_0))^2. \tag{12}$$

Придавая всем членам этого выражения стандартный вид

$$(\vec{\rho}, M\vec{\rho}), \tag{13}$$

где M – некоторая 3×3 матрица, получим для матрицы F нелинейное уравнение типа Рикатти:

$$i\hbar\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{2\hbar^2}{m}F^2 + \frac{ie\hbar}{mc}(d(\mathbf{A}(\mathbf{r}_0))F + Fd^T(\mathbf{A}(\mathbf{r}_0))) -$$

$$-\frac{e^2}{2mc^2}(d(\mathbf{A}(\mathbf{r}_0))d^T(\mathbf{A}(\mathbf{r}_0))) - \frac{1}{2}eD_2U(\mathbf{r}_0) + \frac{e}{2c}(\dot{\mathbf{r}}_0 D_2\mathbf{A}(\mathbf{r}_0)), \tag{14}$$

где $d(\mathbf{A}(\mathbf{r}_0))$, $D_2\mathbf{A}(\mathbf{r}_0)$, $D_2U(\mathbf{r}_0)$ – матрицы, определяемые пространственными производными потенциалов по компонентам $\mathbf{r}_0$,

$$d(\mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad D_2\mathbf{A}(\mathbf{r}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} \end{pmatrix},$$

$$D_2U(\mathbf{r}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \end{pmatrix} \tag{15}$$

и верхний индекс T означает операцию транспонирования. Эти матрицы являются функциями времени, так как в соответствии с уравнениями (2) или (3) $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$.

Вводя вместо F новую матрицу Φ:

$$F = \frac{m}{2\hbar}\Phi, \qquad \Phi = \frac{2\hbar}{m}F, \tag{16}$$

получим

$$i\dot{\Phi} = \Phi^2 + \frac{ie}{mc}(d(\mathbf{A})\Phi + \Phi d^T(\mathbf{A})) - \frac{e}{m}D_2U - \frac{e^2}{m^2c^2}(d(\mathbf{A})d^T(\mathbf{A})) + \frac{e}{mc}(\dot{\mathbf{r}}_0 D_2\mathbf{A}). \quad (17)$$

Заметим, что можно отказаться от кулоновской калибровки потенциалов (7); для этого достаточно в последнем члене уравнения (14) вместо векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}_0)$ использовать вихревую, то есть поперечную часть этого потенциала $\mathbf{A}^{\perp}(\mathbf{r}_0)$ $(\operatorname{div}\mathbf{A}^{\perp}(\mathbf{r}_0) = 0)$.

Хотя это матричное уравнение типа Рикатти является нелинейным, его можно свести (для произвольной $n \times n$ размерности) к системе линейных уравнений. Для этого рассмотрим линейную систему уравнений

$$\frac{dX}{dt} = A_1X + A_2Y, \qquad \frac{dY}{dt} = A_3X + A_4Y, \quad (18)$$

где X, Y – n-компонентные векторы и A_i – $n \times n$-матрицы, являющиеся произвольными функциями времени. Эта система имеет n линейно независимых решений, которые можно считать столбцами матриц $\hat{X}, \hat{Y}$. Потребуем, чтобы в начальный момент времени матрица $\hat{Y}$ была единичной, а матрица $\hat{X}$ совпадала с $\Phi(0) = \Phi_0$. Разрешая систему (18) (что не всегда просто) при указанных начальных условиях, получим $n \times n$-матрицы $\hat{X}(t)$ и $\hat{Y}(t)$. Эти матрицы, так же как и векторы X, Y, удовлетворяют уравнениям (18). Матрицу $\Phi(t)$ определим посредством равенства

$$\Phi(t) = \hat{X}(t)\hat{Y}^{-1}(t); \quad (19)$$

матрица $\Phi(t)$ имеет, очевидно, начальное значение, равное Φ_0. Дифференцируя это выражение по времени и используя уравнения (18), убеждаемся, что матрица $\Phi(t)$ подчиняется уравнению

$$\dot{\Phi} = -\Phi A_3\Phi + A_1\Phi - \Phi A_4 + A_2, \quad (20)$$

то есть нелинейному матричному уравнению типа Рикатти. Таким образом, определив решения линейной системы (18), можно с помощью соотношения (19) найти решение нелинейного матричного уравнения (20).

Нетрудно убедиться, что изучаемое нами уравнение (17) для Φ принадлежит как раз к уравнениям типа (20) и переходит в него при $n = 3$ и

$$A_1 = \frac{e}{mc}d(\mathbf{A}), \quad A_2 = i\left[\frac{e}{m}D_2U + \frac{e^2}{m^2c^2}(d(\mathbf{A})d^T(\mathbf{A})) - \frac{e}{mc}(\dot{\mathbf{r}}_0 D_2\mathbf{A})\right],$$

$$A_3 = -iI, \quad A_4 = -\frac{e}{mc}d^T(\mathbf{A}).$$

Можно показать, что решение (19) для матрицы $\Phi(t)$ все время остается симметричным, если только симметрична начальная матрица Φ_0.

В качестве иллюстрации рассмотрим движение волнового пакета в продольном однородном и постоянном магнитном поле, описываемом векторным потенциалом

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}H(-y, x, 0) \qquad (\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0).$$

В этом случае матрица $d(\mathbf{A}(\mathbf{r}_0))$ равна

$$d(\mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) = \frac{1}{2}H\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $D_2\mathbf{A}(\mathbf{r}_0) = D_2U(\mathbf{r}_0) = 0$. Можно видеть, что продольное распределение пакета ведет себя как в свободном пространстве. Для поперечных же компонент имеем уравнение

$$i\dot{\overline{\Phi}} = \overline{\Phi}^2 + i\Omega(\sigma\overline{\Phi} + \overline{\Phi}\sigma^T) - \Omega^2 I, \tag{21}$$

где $\overline{\Phi}$ – 2×2-матрица,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\Omega = eH/2mc$ – частота ларморовой прецессии.

В частном случае, когда волновой пакет осесимметричен относительно своей прямолинейной траектории, матрица $\overline{\Phi}$ может быть пропорциональна единичной:

$$\overline{\Phi} = \Omega W(\tau) I;$$

при этом

$$\tau = \Omega t, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $W(\tau)$ подчиняется уравнению

$$W' = i(1 - W^2),$$

где штрихом отмечено дифференцирование по τ. Это уравнение имеет решение

$$W(t) = \frac{(1 + W_0)e^{i\Omega t} - (1 - W_0)e^{-i\Omega t}}{(1 + W_0)e^{i\Omega t} + (1 - W_0)e^{-i\Omega t}},$$

где W_0 – начальное значение $W(t)$. Вещественная часть $W(t)$ равна

$$\mathrm{Re}W(t) = W_1/[(\cos\Omega t - W_2 \sin\Omega t)^2 + W_1^2 \sin^2\Omega t],$$

где W_1, W_2 – соответственно вещественная и мнимая части W_0. Таким образом, поперечные размеры волнового пакета осциллируют с удвоенной ларморовой частотой. Максимальное и минимальное значения $\mathrm{Re}W(t)$ равны

$$W_1 \quad \text{и} \quad (1 + W_2^2)/W_1.$$

Если W_0 равно единице, то решение стационарное, то есть волновой пакет с поперечными размерами

$$d = 2\sqrt{\hbar c/eH} = \sqrt{2\hbar/m\Omega}$$

при движении в продольном магнитном поле сохраняет эти размеры.

Имеется также менее симметричное стационарное решение уравнения (21), описывающее сплюснутые в поперечном направлении волновые пакеты,

$$\overline{\Phi} = \Omega\begin{pmatrix} 1 + z & iZ \\ iZ & 1 - Z \end{pmatrix},$$

где Z – произвольное комплексное число ($|Z| < 1$). Это решение поворотом осей на угол $\varphi/2$, где $\varphi = \arg Z$, можно привести к более простому виду:

$$\overline{\Phi}' = \Omega \begin{pmatrix} 1+|Z| & i|Z| \\ i|Z| & 1-|Z| \end{pmatrix},$$

когда сплюснутость видна непосредственно.

Таким образом, эволюция волнового пакета в электромагнитном поле достаточно общего вида описывается нелинейным матричным уравнением (14) или (17) типа Рикатти. Уравнение применимо к описанию эволюции волновых пакетов в широком классе вакуумных приборов. Рассмотрена эволюция волновых пакетов различного вида в постоянном магнитном поле.

Автор признателен А.М.Прохорову, Ф.В.Бункину, Е.М.Дианову, П.П.Пашинину, М.Я.Щелеву, В.В.Савранскому, В.Д.Скаржинскому, В.О.Турину за полезные обсуждения. Автор признателен Российскому фонду фундаментальных исследований за поддержку.

---

1. В.П.Быков, А.М.Прохоров, В.О.Турин, С.Л.Чин, Письма в ЖЭТФ **63**, 408 (1996).
2. В.П.Быков, А.В.Герасимов, ДАН **32**, 50 (1993).
3. В.П.Быков, А.В.Герасимов, В.О.Турин, УФН **165**, 955 (1995).
4. V.P.Bykov, A.V.Gerasimov, and V.O.Turin, Laser Physics **5**, 841 (1995).
5. V.P.Bykov, A.V.Gerasimov, and V.O.Turin, Ann. Fond. L.de Broglie **20**, 331 (1995).
6. E.J.Heller, J. Chem. Phys. **62**, 1544 (1975).
7. E.J.Heller, J. Chem. Phys. **68**, 2066 (1978).
8. V.P.Bykov, J. Sov. Laser Res. **12**, 38 (1991).
9. В.П.Быков, УФН **63** 89 (1993).