Письма в ЖЭТФ, том 64, вып.9, стр.618 - 623 © 1996г. 10 ноября

СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В КВАНТОВЫХ ТОЧКАХ

А.Ф.Андреев

Институт физических проблем им.П.Л.Капицы РАН
117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 октября 1996 г.

В наноструктурах NdN и SdS осуществляются аномальные основные состояния с нецелым средним числом электронов в квантовых точках d, соответствующие парной или одноэлектронной сверхпроводимости и отделенные от состояний с определенным (целым) числом электронов, как правило, фазовыми переходами II рода. Обсуждаются характерные особенности парного и одноэлектронного сверхпроводящего тока Джозефсона в системах SdS.

PACS: 71.24.+q, 74.80.Fp

Квантовыми точками мы называем мезоскопические системы, размер которых столь мал, что расстояние между дискретными одноэлектронными уровнями в них превышает температуру. Металлические квантовые точки в последнее время стали доступны для эксперимента [1,2]. Специфика термодинамического поведения квантовых точек заключается в том, что изменение среднего числа электронов $< n >$ при изменении их химического потенциала μ происходит в результате своеобразных фазовых переходов I рода (см. [3]). Возникающие при этом области расслоения на фазы соответствуют аномальным основным состояниям с нецелым $< n >$, которые характеризуются аномальными средними электронных ψ-операторов двух возможных типов: $< \psi >$ или $< \psi\psi >$. В первом случае мы будем говорить о системе с простым "конденсатом" или с простой фазой, во втором случае - с парным конденсатом или двойной фазой. Состояние с двойной фазой - это то, во что превращается сверхпроводящее состояние БКШ при уменьшении размеров системы. Состояния с простой фазой замечательны тем, что в них наряду со спонтанным нарушением калибровочной инвариантности (одноэлектронный сверхпроводник!) происходит спонтанное нарушение таких фундаментальных симметрий, как пространственные повороты на угол 2π и двойное отражение времени (см. [3]).

В системах частиц в магнитных (или ионных) ловушках [4-6] аномальные основные состояния являются основными состояниями общего вида, поскольку здесь заданным является $< n >$ и нет оснований для $< n >$ быть целым. Другими интересными объектами с подобными свойствами могли бы быть неустойчивые относительно излучения нуклонов, но долгоживущие тяжелые атомные ядра. Рассматриваемые здесь электронные квантовые точки находятся в контакте с бесконечными резервуарами электронов, так что заданным является μ. Поскольку "расслоение на фазы" в замкнутой системе происходит (см. [3]) лишь при некоторых точно определенных значениях μ, возможность фактического осуществления аномальных состояний нуждается в дополнительном исследовании с учетом конечной прозрачности барьеров, отделяющих квантовую точку от макроскопических контактов. Настоящая работа посвящена этому вопросу.

1. Пусть $\mu_c^{(1)}$ есть критическое значение μ, при котором происходит переход точки из состояния с $n = n_c$ в состояние с $n = n_c + 1$ и которое соответствует аномальным состояниям с простой фазой. Имеем (см.[3]) $E_0(n_c + 1) - E_0(n_c) = \mu_c^{(1)}$, где $E_0(n)$ – энергия основного состояния точки с числом электронов n (для простоты считаем, что крамерсовское вырождение уровней снято магнитным полем). Введем энергию $E = E_0 - \mu n$ в системе отсчета, "вращающейся" (в пространстве параметра порядка, см. [3]) с угловой скоростью $\mu/\hbar$, μ - химический потенциал электронов в контактах (резервуаре). Пусть, как это обычно бывает [7], точка находится во внешнем поле, создаваемом затвором, что приводит к сдвигу ее химического потенциала на $\mu_{ext} = \alpha V_G$, α - постоянная, V_G - потенциал затвора [7]. В результате имеем $E(n_c + 1) - E(n_c) = \mu_c^{(1)} + \mu_{ext} - \mu \equiv 2\xi$.

Пусть потенциал затвора близок к значению, соответствующему условию $\xi = 0$. В этом случае имеется два состояния $| n_c >$ и $| n_c + 1 >$; с близкими энергиями E, остальными состояниями можно пренебречь. В пренебрежении связью с контактами гамильтониан системы диагонален по n. Выбрав начало отсчета энергии так, что $E(n_c) = 0$, имеем

$$H_0 = 2\xi |n_c + 1\rangle\langle n_c + 1|. \tag{1}$$

Аналогичную формулу

$$H_0 = 2\xi |n_c + 2\rangle\langle n_c + 2| \tag{2}$$

можно написать вблизи точки $\mu_{ext} = \mu - \mu_c^{(2)}$ перехода между состояниями одинаковой четности $| n_c >$ и $| n_c + 2 >$, соответствующей аномальным состояниям с двойной фазой.

2. Связь между квантовой точкой и контактами описывается туннельным гамильтонианом

$$H_{\text{T}} = \int d^3R d^3r T(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \psi^+(\mathbf{R}) \psi(\mathbf{r}) + h.c., \tag{3}$$

где интегрирование по $\mathbf{r}$ проводится по объему квантовой точки, по $\mathbf{R}$ – по объему контактов, T – некоторое ядро. Рассмотрим возможность осуществления состояния с простой фазой в квантовой точке d в системе NdN, в которой контакты находятся в нормальном состоянии. Благодаря эффекту близости одноэлектронное аномальное среднее $< \psi(\mathbf{r}) >$ в объеме точки порождает ненулевое среднее $< \psi(\mathbf{R}) >$ также и в части объема контакта, непосредственно примыкающего к точке. В приближении среднего поля заменим в (3) оператор $\psi^+(\mathbf{R})$ его средним значением $\eta^*(\mathbf{R}) = < \psi^+(\mathbf{R}) >$:

$$\bar{H}_{\text{T}} = \int d^3R d^3r T(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \eta^*(\mathbf{R}) \psi(\mathbf{r}) + h.c. \tag{4}$$

Оператор (4) имеет ненулевые матричные элементы

$$\Delta = -\langle n_c + 1 | \bar{H}_{\text{T}} | n_c \rangle, \qquad \Delta^* = -\langle n_c | \bar{H}_{\text{T}} | n_c + 1 \rangle \tag{5}$$

переходов с изменением n, где

$$\Delta = -\int d^3R d^3r T^*(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \eta(\mathbf{R}) \Phi^*(\mathbf{r}), \quad \Phi(\mathbf{r}) = \langle n_c | \psi(\mathbf{r}) | n_c + 1 \rangle. \tag{6}$$

Отличный от нуля параметр Δ и связанное с ним поле $\eta(\mathbf{R})$ вызывают изменение энергии самих контактов. Поскольку в равновесном состоянии контактов в отсутствие связи с квантовой точкой поле $\eta(\mathbf{R})$ равно нулю, это изменение энергии положительно и при малых Δ может быть записано в виде $|\Delta|^2/2\xi_0$, где ξ_0 – положительная постоянная размерности энергии. Таким образом, полный гамильтониан системы точка + контакты с учетом (1) и (5) равен

$$H = \frac{1}{2\xi_0}|\Delta|^2 + 2\xi|n_c+1\rangle\langle n_c+1| - \Delta^*|n_c\rangle\langle n_c+1| - \Delta|n_c+1\rangle\langle n_c|. \tag{7}$$

Основное состояние $|g>$ гамильтониана (7) и энергия E_g основного состояния определяются формулами

$$|g>= u|n_c> +v\frac{\Delta}{|\Delta|}|n_c+1>, \tag{8}$$

$$E_g = \frac{1}{2\xi_0}|\Delta|^2 - (|\Delta|^2+\xi^2)^{1/2} + \xi, \tag{9}$$

где

$$u^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\xi}{\sqrt{|\Delta|^2+\xi^2}}\right), \qquad v^2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\xi}{\sqrt{|\Delta|^2+\xi^2}}\right), \tag{10}$$

причем $u>0$, $v>0$. Из условия минимальности E_g находим равновесное значение параметра Δ как функции потенциала затвора: $\Delta=0$ при $|\xi|>\xi_0$, $|\Delta|=(\xi_0^2-\xi^2)^{1/2}$ при $|\xi|<\xi_0$. Фаза параметра Δ при $|\xi|<\xi_0$ остается неопределенной, основное состояние вырождено по ее значениям. Равновесная энергия E_g и среднее число электронов $<n>$ в квантовой точке при $|\xi|<\xi_0$ определяются формулами

$$E_g = -\frac{(\xi_0-\xi)^2}{2\xi_0}, \qquad \langle n\rangle = n_c + \frac{\xi_0-\xi}{2\xi_0}. \tag{11}$$

При $\xi=\pm\xi_0$ происходят фазовые переходы II рода из состояний $|n_c>$ и $|n_c+1>$ в аномальное состояние с простой фазой. Поскольку аномальное среднее $<\psi(\mathbf{r})>$, в силу (8) и (6) равное

$$\langle\psi(\mathbf{r})\rangle = uv(\Delta/|\Delta|)\Phi(\mathbf{r}) = (\Phi(\mathbf{r})/2\xi_0)\Delta, \tag{12}$$

пропорционально Δ, параметром порядка этих переходов можно считать Δ.

3. Условия осуществления аномальных состояний с двойной фазой в системе NdN могут быть рассмотрены аналогичным образом на основе гамильтониана

$$H_{\mathrm{T}}^{(2)} = \int d^3Rd^3R'd^3rd^3r'T_2(\mathbf{R},\mathbf{R}';\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi^+(\mathbf{R})\psi^+(\mathbf{R}')\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}') + h.c., \tag{13}$$

соответствующего второму приближению теории возмущений по туннельному гамильтониану (3).

Путем введения вместо $\eta^*(\mathbf{R})$ среднего поля $F^*(\mathbf{R},\mathbf{R}') =< \psi^+(\mathbf{R})\psi^+(\mathbf{R}') >$ находим недиагональные по n матричные элементы полного гамильтониана, аналогичные (5):

$$\langle n_c|\tilde{H}_{\text{T}}^{(2)}|n_c+2\rangle = -\Delta^* \equiv \int d^3Rd^3R'd^3rd^3r'T_2(\mathbf{R},\mathbf{R}';\mathbf{r},\mathbf{r}')F^*(\mathbf{R},\mathbf{R}')\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \quad (14)$$

где

$$\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \langle n_c|\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}')|n_c+2\rangle. \quad (15)$$

Полный гамильтониан

$$H = \frac{1}{2\xi_0}|\Delta|^2 + 2\xi|n_c+2\rangle\langle n_c+2| - \Delta^*|n_c\rangle\langle n_c+2| - \Delta|n_c+2\rangle\langle n_c| \quad (16)$$

отличается от (7) лишь заменой $| n_c+1 >$ на $| n_c+2 >$ и тем, что фаза параметра Δ есть в данном случае двойная фаза. С учетом этой замены все формулы сохраняют свой вид, за исключением выражения для среднего числа электронов в точке: $< n >= n_c + (\xi_0 - \xi)/\xi_0$.

Отметим, что обсуждаемые фазовые переходы могли бы быть причиной "размазанности" перехода $< n >$ от значения n_c к n_c+1 или n_c+2 при изменении потенциала V_G затвора, наблюдаемой на эксперименте [7] даже при температуре, стремящейся к нулю и не получившей удовлетворительного объяснения.

4. Рассмотрим состояния с двойной фазой в случае, когда контакты являются массивными сверхпроводниками. Функция $F(\mathbf{R},\mathbf{R}')$ при этом отлична от нуля уже в силу сверхпроводящей природы состояния контактов. Полный гамильтониан определяется формулой (16) с $\xi_0 \to \infty$, так что точки фазовых переходов исчезают. Аномальные состояния осуществляются формально при любых ξ. В силу формулы (14), модуль параметра Δ определяется туннельной прозрачностью барьера, двойная фаза параметра Δ совпадает с фазой φ параметра порядка в сверхпроводнике.

Рассмотрим систему SdS, состоящую из квантовой точки d между двумя сверхпроводниками - левым L и правым R . В этом случае имеем $\Delta = \Delta_L + \Delta_R$, где $\Delta_{L,R} =| \Delta_{L,R} | e^{i\varphi_{L,R}}$, $| \Delta_{L,R} |$ определяются прозрачностями барьеров, разделяющих соответственно левый или правый сверхпроводник и квантовую точку, $\varphi_{L,R}$ - фазы соответственно левого и правого сверхпроводников.

Энергия основного состояния E_g и среднее число электронов в квантовой точке $< n >$ равны

$$E_g = -(|\Delta|^2+\xi^2)^{1/2} + \xi, \qquad \langle n\rangle = n_c + 1 - \frac{\xi}{(|\Delta|^2+\xi^2)^{1/2}}, \quad (17)$$

причем

$$|\Delta|^2 = |\Delta_L|^2 + |\Delta_R|^2 + 2|\Delta_L||\Delta_R|\cos\phi, \qquad \phi = \varphi_R - \varphi_L.$$

Протекающий через систему сверхпроводящий ток Джозефсона равен

$$J(\phi) = \frac{2e}{\hbar}\frac{\partial E_g}{\partial \phi} = \frac{2e}{\hbar}\frac{|\Delta_L||\Delta_R|\sin\phi}{\sqrt{\xi^2 + |\Delta_L|^2 + |\Delta_R|^2 + 2|\Delta_L||\Delta_R|\cos\phi}}. \quad (18)$$

Обратим внимание на то, что последняя формула совпадает с результатом работы Матвеева и др.[8] для тока в системе SdS, где средний сверхпроводник описывается теорией БКШ в условиях существенной кулоновской блокады.

5. Рассмотрим, наконец, наиболее интересный случай системы SdS в условиях, когда квантовая точка d близка к переходу $n_c \to n_c+1$, соответствующему аномальным состояниям с простой фазой.

Гамильтониан системы отличается от выражения (7), полученного для нормальных контактов, видом первого члена. При разложении энергии сверхпроводящих контактов по степеням малого параметра Δ, характеризующегося простой фазой φ, необходимо учесть, что условию калибровочной инвариантности, кроме $|\Delta|^2$, удовлетворяют также выражения $e^{-i\varphi_{L,R}}\Delta^2$ и их комплексно сопряженные ($\varphi_{L,R}$ есть, как и выше, сверхпроводящие фазы контактов). Наличие таких членов снимает вырождение по фазе φ. Зависящая от φ часть полной энергии при надлежащем выборе начала отсчета φ может быть записана в виде

$$H_\varphi = -\frac{b}{4}|\Delta|^2\{\cos(2\varphi - \varphi_L) + \cos(2\varphi - \varphi_R)\} = -\frac{b}{2}|\Delta|^2 \cos(2\varphi - \bar{\varphi}) \cos\frac{\phi}{2}, \qquad (19)$$

где b – постоянная, $\bar{\varphi} = (\varphi_L + \varphi_R)/2$, $\phi = \varphi_R - \varphi_L$. Для простоты мы предположили, что система симметрична относительно замены $L \leftrightarrow R$.

Энергия (19) не меняется при преобразовании $\varphi \to \varphi + \pi$ при заданных $\varphi_{L,R}$, так что вырождение по φ не снимается полностью. Остается двукратное вырождение, имеющее простой физический смысл. Аномальные состояния с простой фазой соответствуют спонтанному нарушению инвариантностей относительно пространственных поворотов на угол 2π и двойного отражения времени. При этих преобразованиях состояние с фазой φ переходит в состояние с $\varphi + \pi$ (см.[3]), так что двукратное вырождение есть прямое следствие спонтанного нарушения. В зависимости от знака выражения $b\cos(\phi/2)$ минимум энергии (19) достигается при двух различных парах значений фазы φ : $\bar{\varphi}/2$, $(\bar{\varphi}/2) + \pi$ и $(\bar{\varphi} + \pi)/2$, $(\bar{\varphi} + \pi)/2 + \pi$. Само минимальное значение в обоих случаях равно

$$H_\varphi = -\frac{1}{2}|\Delta|^2 |b\cos\frac{\phi}{2}|. \qquad (20)$$

Полный гамильтониан системы определяется формулой (7), если фигурирующий в ней параметр ξ_0 считать теперь функцией разности фаз ϕ:

$$\xi_0(\phi) = (a - |b\cos\frac{\phi}{2}|)^{-1}, \qquad (21)$$

где a – постоянная, такая, что $a > |b|$. При этом остаются в силе все результаты (8)–(12).

Производная по ϕ от энергии E_g, заданной первой из формул (11), определяет сверхпроводящий ток Джозефсона $J(\phi)$. Ток $J(\phi)$ периодичен по ϕ с периодом 2π и в интервале $-\pi < \phi < \pi$ равен

$$J(\phi) = \frac{2e}{\hbar}\frac{\partial E_g}{\partial \phi} = \frac{e|b|}{2\hbar}\{\xi_0^2(\phi) - \xi^2\}\sin\frac{\phi}{2}. \qquad (22)$$

Характерной особенностью функции (22) является то, что ее аналитическое продолжение с интервала $(-\pi, \pi)$ на всю вещественную ось значений ϕ является функцией с периодом не 2π, а 4π. 2π-периодичность осуществляется благодаря разрывам тока

$$\Delta J \equiv J(\pi) - J(-\pi) = \frac{e|b|}{\hbar}\{\xi_0^2(\pi) - \xi^2\}$$

при $\phi = \pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Указанная особенность есть проявление необычной физической природы тока $J(\phi)$. Это есть сверхпроводящий ток куперовских пар электронов лишь в областях, далеких от квантовой точки. В примыкающих к точке областях контактов этот ток трансформируется в ток одиночных электронов. Через саму квантовую точку ток целиком протекает в виде сверхпроводящего тока одиночных электронов.

Настоящая работа выполнена во время визита автора в Лабораторию низких температур Технического Университета Хельсинки. Выражаю благодарность М.Крусиусу и М.Пааланену за любезное приглашение и полезные дискуссии.

---

1. D.C.Ralph, C.T.Black, and M.Tinkham, Phys. Rev. Lett. **74**, 3241 (1995).
2. C.T.Black, D.C.Ralph, and M.Tinkham, Phys. Rev. Lett. **76**, 688 (1996).
3. А.Ф.Андреев, Письма в ЖЭТФ **63**, 963 (1996).
4. M.H.Anderson, J.K.Ensher, M.R.Mattews et al., Science **269**, 198 (1995).
5. C.C.Bradley, C.A.Sackett, J.J.Tollett et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
6. K.B.Davis, M.-O.Mewes, M.R.Andrews et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
7. *Single Charge Tunneling*, Eds. H.Grabert and M.H.Devoret, Plenum, NY, 1992.
8. K.A.Matveev, M.Gisselfalt, L.I.Glazman et al. Phys. Rev. Lett. **70**, 2940 (1993).