

## МЕХАНИЗМ КОЛЛАПСА БОЗЕ-ГАЗА МАЛОЙ ПЛОТНОСТИ С СИЛЬНЫМ ПРИТЯЖЕНИЕМ

*В.С.Бабиченко, А.Н.Козлов*

*Российский научный центр "Курчатовский институт"  
123182 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 9 октября 1996 г.

Показано, что бозе-конденсатное состояние бозе-газа малой плотности, потенциал взаимодействия между частицами которого имеет уровень связанного состояния, является неустойчивым. Неустойчивыми оказываются моды с большими импульсами порядка обратного радиуса связанного состояния, флуктуации которых растут экспоненциально во времени.

PACS: 03.75.Fi

В последние годы был достигнут существенный прогресс в области экспериментального исследования явления бозе-конденсации разреженных бозе-систем, таких, например, как системы экситонов в полупроводниках [1, 2] и газы атомов щелочных металлов [3–5]. Потенциал взаимодействия между частицами в этих системах имеет характер отталкивательного кора на малых расстояниях и ямы притяжения на больших расстояниях, причем, как правило, достаточно глубокой для существования связанного состояния двух частиц. В связи с этим представляет несомненный интерес теоретическое исследование свойств разреженных бозе-систем с сильным притяжением между частицами.

В теоретических работах [6, 7] рассматривались свойства основного состояния бозе-газа с отталкиванием на малых и притяжением на больших расстояниях. В работе [6] притяжение предполагалось слабым, а отталкивание – типа твердого кора. В работе [7] рассматривался случай сильного притяжения, при этом отталкивательный кор предполагался мягким. И в том, и в другом случаях было показано, что равновесное состояние является жидким, причем в случае сильного притяжения [7] равновесная плотность жидкости оказывается такой, что среднее расстояние между частицами, отвечающее этой плотности, является величиной порядка характерного размера отталкивательного кора.

В экспериментальных работах по изучению свойств бозе-газа атомов щелочных металлов [3–5] исследуется область малых плотностей, при которых газовый параметр  $\alpha = n f_0^3$  (где  $n$  – плотность бозе-газа,  $f_0$  – амплитуда рассеяния атомов при малых энергиях) является малой величиной,  $\alpha \ll 1$ . Очевидно, что бозе-газ малой плотности с сильным притяжением должен коллапсировать в жидкое состояние с большой плотностью, являющейся равновесной. Однако существенным является выяснение вопроса о том, каков механизм процесса коллапса и каковы его характерные времена.

Этот вопрос ясен в случае, когда яма притяжения потенциала взаимодействия двух атомов является глубокой, но, тем не менее, недостаточно глубока для существования уровня связанного состояния. В этом случае амплитуда рассеяния частиц с малыми энергиями  $f_0$  отрицательна (мы выбираем знак амплитуды рассеяния противоположным выбранному в [8]). Используя хорошо известную формулу для спектра элементарных возбуждений бозе-газа малой плотности,  $\alpha \ll 1$  [9], легко убедиться, что, если  $f_0 < 0$ , квадрат спектра

элементарных возбуждений для импульсов  $p \lesssim \sqrt{n_0 |f_0|}$  ( постоянная Планка  $\hbar = 1$ ) является отрицательной величиной. Это означает, что коррелятор флуктуаций классического поля, которое соответствует бозе-конденсату атомов, экспоненциально растет во времени для флуктуаций с импульсами  $p \lesssim \sqrt{n_0 |f_0|}$ . Инкремент роста этих флуктуаций оказывается величиной, равной  $1/\tau \sim \mu$ , где  $\mu = (4\pi/m)n_0 |f_0|$  ( $m$  – масса атома),  $\tau$  – время развития неустойчивости приводящей к коллапсу системы. В случае существования связанного состояния двух атомов вопрос о механизме коллапса и его характерных временах не столь тривиален, особенно когда при этом амплитуда рассеяния двух частиц при малых энергиях является положительной величиной. Выяснению этого вопроса и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим пространственно однородный бозе-газ атомов малой плотности с потенциалом взаимодействия, имеющим уровень связанного состояния. Для определенности будем считать, что этот уровень один и достаточно мелкий, такой, что радиус связанного состояния много больше характерных размеров потенциала взаимодействия. В этом случае амплитуда рассеяния на малых энергиях  $f_0$  является положительной величиной, равной  $f_0 = 1/\kappa$  [8], при этом энергия связи молекулы  $E_0 = \kappa^2/m$ . Плотность системы мы будем предполагать малой, такой что  $\alpha = n f_0^3 \ll 1$ . В этом случае среднее расстояние между атомами велико по сравнению с радиусом связанного состояния. Кроме этого, предположим, что начальным состоянием, которое в дальнейшем мы будем рассматривать как "основное", является бозе-конденсат атомов с импульсом  $p = 0$ , при этом молекулы в этом состоянии отсутствуют. Если игнорировать процессы образования связанных состояний (молекул), то в связи с тем, что  $f_0 > 0$ , можно думать, что начальное состояние является устойчивым и, фактически, совпадает с основным состоянием бозе-газа с отталкивательным взаимодействием, имеющим ту же амплитуду рассеяния  $f_0$ , что и рассматриваемая система. Однако, как будет показано в дальнейшем, учет процессов рождения молекул из бозе-конденсата атомов является определяющим для описания динамики начального состояния, приводя к неустойчивости этого состояния.

Для того, чтобы в этом убедиться, найдем спектр элементарных возбуждений рассматриваемой системы, который определяется полюсами перенормированной причинной функции Грина атомов  $G'(p)$  [9]. Функция Грина  $G'(p)$  известным образом [9] выражается через собственно-энергетические части (СЭЧ)  $\Sigma_{11}(p)$ ,  $\Sigma_{02}(p)$  и функцию Грина невзаимодействующих частиц  $G_0(p) = (\omega + \mu - p^2/2m + i\delta)^{-1}$ , где  $\mu$  – химический потенциал системы, который, как и в бозе-газе малой плотности с отталкиванием, будет полагаться равным  $\mu = (4\pi/m)n_0 f_0$ , что соответствует предположению о свойствах начального состояния. В случае газа малой плотности  $\Sigma_{11}(p)$  и  $\Sigma_{02}(p)$  известным образом [9] выражаются через двухчастичную вершину  $\Gamma(P; k, k')$ , которая представляет собой сумму лестничных диаграмм, и может быть получена из решения уравнения Бетте–Солпитера в вакууме (рис.1). В случае наличия связанного состояния с мелким уровнем двухчастичная вершина имеет вид

$$\Gamma(P; k, k') = F(P; k, k') + \left(\frac{4\pi}{m}\right) \frac{2\kappa}{m} D_0(P), \quad (1)$$

где

$$F(P; k, k') = \left(\frac{4\pi}{m}\right) f(k, k') + \left(\frac{4\pi}{m}\right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f(p, k) f^*(p, k') \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{\Omega + 2\mu - P^2/4m - p^2/m + i\delta} - \frac{1}{(k')^2/m - p^2/m + i\delta} \right] - \left(\frac{4\pi}{m}\right) \frac{2\kappa}{k^2 + \kappa^2}, \quad (2)$$

$$D_0(P) = \frac{1}{\Omega + 2\mu + E_0 - P^2/4m + i\delta}. \quad (3)$$

В (2)  $f(k, k')$  – амплитуда рассеяния двух частиц [9, 10],  $\Omega, P$  – суммарная частота и импульс соответственно. Пунктирная линия на рис.1 обозначает затравочный потенциал взаимодействия между атомами, сплошная линия – функция Грина  $G_0(p)$ . В выражении (1) для  $\Gamma(P; k, k')$  второе слагаемое, пропорциональное  $D_0(P)$ , а также последнее слагаемое в (2) являются вкладом дискретного спектра, в то время как два первых слагаемых в (2) являются вкладом непрерывного спектра [10]. В выражении (1) мы выделили полюсную по суммарной частоте  $\Omega$  часть в виде отдельного слагаемого пропорционального пропагатору молекулы  $D_0(P)$ , который на диаграммах будет изображаться волнистой линией, в то время как пропагатор атома  $G_0(p)$  будет изображаться сплошной линией. Неполюсную по  $\Omega$  часть  $F(P; k, k')$  вершины  $\Gamma(P, k, k')$  мы в дальнейшем будем считать не зависящей от импульсов  $k$  и  $k'$  и обозначать  $F(P)$ . Это предположение не является существенным для полученного ниже результата, однако существенно упрощает изложение.

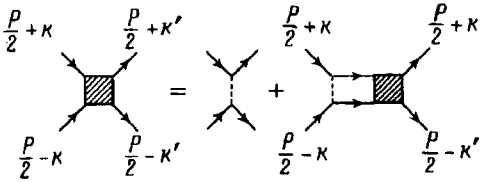


Рис.1

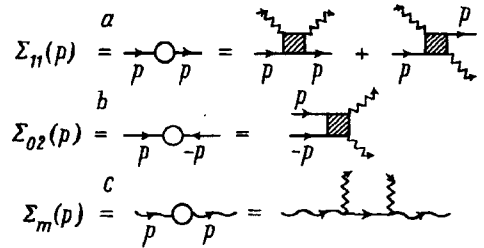


Рис.2

Заметим, что  $F(P)$  имеет как действительную, так и мнимую части. Выражение для мнимой части  $F(P)$  может быть легко получено из (2) с использованием оптической теоремы для амплитуды рассеяния [10] и в предположении независимости амплитуды рассеяния от импульсов  $k, k'$  ( $f(k, k') = f_0 = \kappa^{-1}$ ) имеет вид

$$\text{Im}F(P) = -(4\pi/m)f_0^2 \sqrt{m(\Omega + 2\mu - P^2/4m)} \Theta(\Omega + 2\mu - P^2/4m),$$

где  $\Theta(x) = 1$  при  $x > 0$ , и  $\Theta(x) = 0$  при  $x < 0$ . СЭЧ, изображенные на рис.2, (ломаные линии обозначают линии бозе-конденсата атомов, им соответствует множитель  $\sqrt{n_0}$ , где  $n_0$  – плотность атомов в бозе-конденсате), имеют вид

$$\Sigma_{11}(p) = 2n_0\Gamma(p) = 2n_0F(p) + 2n_0\left(\frac{4\pi}{m}\right) \frac{2\kappa}{m} D_0(p), \quad (4)$$

$$\Sigma_{02}(p) = n_0\Gamma(0) = n_0F(0) + n_0\left(\frac{8\pi}{m}\right) \frac{1}{\kappa} = n_0\left(\frac{8\pi}{m}\right) \frac{1}{\kappa}. \quad (5)$$

При  $|p| \gg \sqrt{n_0 f_0}$ , вблизи "массовой поверхности" пропагатора атомов, то есть при  $\omega \approx p^2/2m$  ( $\omega, p$  – внешняя частота и импульс атома),  $F(p)$  в выражении (4) для  $\Sigma_{11}(p)$  имеет мнимую часть, равную  $\text{Im}F(p) = -(2\pi/m)f_0^2|p|$ . Подставляя выражения (4), (5) для СЭЧ  $\Sigma_{11}(p)$  и  $\Sigma_{02}(p)$  в известное выражение для перенормированной функции Грина  $G'(p)$  [9], можно получить спектр

элементарных возбуждений. Однако здесь мы используем другой путь вычислений, который дает тот же результат, но, на наш взгляд, является более наглядным физически.

Прежде всего выясним вопрос о том, может ли наличие полюсного члена в  $\Sigma_{11}(p)$  существенно повлиять на перенормировку функции Грина атома и на спектр элементарных возбуждений системы. Для этого определим, при каком условии функция Грина атомов  $G_0(p)$  и СЭЧ функции Грина  $G'(p)$  близки к полюсу одновременно. Если пропагатор атома  $G_0(p)$  близок к полюсу, то пропагатор молекулы  $D_0(p)$ , которому пропорционален полюсной член в  $\Sigma_{11}(p)$ , далек от полюса при любом значении импульса  $p$  и равен  $(E_0 + p^2/4m)^{-1}$ . Однако пропагатор  $D_0(-p)$  может быть близок к полюсу одновременно с пропагатором  $G_0(p)$ . Значение импульса, обозначаемое в дальнейшем  $p_0$ , при котором  $G_0(p)$  и  $D_0(-p)$  имеют полюс одновременно, определяется соотношением  $p_0^2/2m - \mu + p_0^2/4m - E_0 - 2\mu = 0$ . Поскольку  $\mu = (4\pi/m)n_0 f_0 \ll E_0$ , величина  $p_0$  имеет вид  $p_0 = \sqrt{4/3mE_0}$ , при этом частота  $\omega$  пропагатора  $G_0(p)$  в случае близости его к полюсу равна  $\omega \approx \Omega_0 = p_0^2/2m$ . Уравнение, определяющее  $p_0$ , является законом сохранения энергии для процесса одновременного рождения из бозе-конденсата атома с большим импульсом  $p$  и молекулы с противоположным импульсом  $-p$  ( $|p| \approx p_0$ ). Следовательно, при  $|p| \approx p_0$  происходит процесс рождения молекулы из бозе-конденсата, при этом также рождается атом с противоположным импульсом, причем в этом случае при  $\omega \approx \Omega_0 = p_0^2/2m$  функции Грина  $G_0(p)$  и  $D_0(-p)$  близки к полюсу одновременно. Элементарная диаграмма для функции Грина  $G'(p)$ , содержащая процесс рождения молекулы из бозе-конденсата атомов и имеющая наименьшую степень плотности  $n_0$ , изображена на рис.3а. Вершина  $\Delta$  процесса рождения из бозе-конденсата молекулы и атома с противоположными импульсами изображена на рис.3б, а выражение для нее при  $|p| \approx p_0$  и  $\omega \approx \Omega_0 = p_0^2/2m$  имеет вид

$$\Delta = - \left( n_0^{3/2} m/p_0^2 \right) \sqrt{(8\pi\kappa/m^2)\Gamma(0)} = -3\sqrt{(\pi/2)}\mu\alpha^{1/2}.$$

Заметим, что малость диаграммы рис.3а по плотности компенсируется близостью к полюсу пропагатора  $D_0(-p)$ , и поэтому эти диаграммы должны быть учтены наряду с диаграммами для неполюсного вклада в СЭЧ  $\Sigma_{11}(p)$ , пропорционального первой степени плотности  $n_0$ .

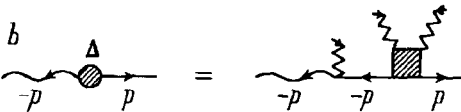
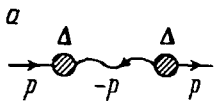


Рис.3

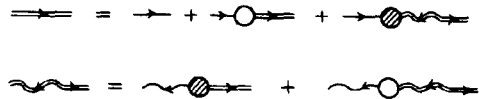


Рис.4

Чтобы найти спектр элементарных возбуждений при  $|p| \approx p_0$ , проведем отбор главной последовательности диаграмм для перенормированной функции Грина  $G'(p)$  при  $|p| \approx p_0$  и  $\omega \approx \Omega_0 = p_0^2/2m$ , используя условие  $p_0 \gg \sqrt{n_0 f_0}$ . Для этого среди диаграмм, содержащих определенную степень пропагаторов

$G_0(p)$  и  $D_0(-p)$ , близких к полюсу, отберем диаграммы, имеющие наименьшую степень  $n_0$ . Эта главная последовательность диаграмм описывается системой уравнений Дайсона (рис.4), имеющей вид

$$\begin{aligned} G'(p) &= G_0(p) + G_0(p)\Sigma_{11}(p)G'(p) + G_0(p)\Delta\Phi(p), \\ \Phi(p) &= D_0(-p)\Delta G'(p) + D_0(-p)\Sigma_m(-p)\Phi(p). \end{aligned} \quad (6)$$

Функция Грина  $G'(p)$ , обозначаемая на рис.4 двойной сплошной линией, является перенормированной функцией Грина атомов, а аномальная функция Грина  $\Phi(p)$ , обозначаемая двойной волнисто-сплошной линией, описывает корреляцию атомов и молекул в состоянии с импульсом  $|p| \approx p_0$ . СЭЧ.  $\Sigma_{11}(p)$  рис.2а (5) при  $|p| \approx p_0$ ,  $\omega \approx \Omega_0$  может быть представлена в виде  $\Sigma_{11}(p) = \Sigma'_{11} - i\gamma_a$ , где действительная часть СЭЧ  $\Sigma_{11}(p)$  равна  $\Sigma'_{11} = \mu$ , а мнимая часть  $\gamma_a = 2\mu/\sqrt{3}$ . СЭЧ пропагатора молекул  $\Sigma_m(-p)$  определяется диаграммой рис.2с и при  $|p| \approx p_0$ ,  $\omega \approx \Omega_0$  имеет вид  $\Sigma_m(-p) = 2n_0(4\pi/m)(2\kappa/m)G_0(-p) = -3\mu$ . Приведенное для  $\Sigma_m(-p)$  выражение является действительным. Отметим, что в рамках лестничного приближения учет перенормировки функции Грина  $G_0(-p)$  неполюсной частью СЭЧ (в силу приведенной выше зависимости  $\text{Im}F(p)$  от частоты) не привел бы к возникновению у  $\Sigma_m(-p)$  мнимой части, так как она входит на большой отрицательной частоте  $\omega \approx -\Omega_0$ .

Система уравнений (6) легко решается и дает следующее выражение для перенормированной функции Грина атомов при  $|p| \approx p_0$ ,  $\omega \approx \Omega_0$  :

$$G'(p) = \frac{1}{\tilde{G}_0^{-1}(p) - \Delta^2 \tilde{D}_0(-p)}. \quad (7)$$

Здесь  $\tilde{G}_0^{-1}(p) = G_0^{-1}(p) - \Sigma_{11}(p)$  ;  $\tilde{D}_0^{-1}(-p) = D_0^{-1}(-p) - \Sigma_m(-p)$ .

Спектр элементарных возбуждений системы атомов определяется видом полюсов функции Грина  $G'(p)$ , которые при  $|p| \approx p_0$  легко находятся из выражения (7), и имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^{(a)}(p) &= \frac{1}{2} (E_0 + p^2/4m + 2\mu + \Sigma'_{11} - \Sigma_m - i\gamma_a) \pm \\ &\pm \sqrt{1/4 (E_0 - 3p^2/4m + 3\mu - \Sigma'_{11} - \Sigma_m + i\gamma_a)^2 - \Delta^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из выражения (8) видно, что спектр элементарных возбуждений состоит из двух ветвей. Полагая импульс  $|p| = p_0^*$ , где  $p_0^*$  определяется выражением  $p_0^* = \sqrt{4/3m(E_0 + 3\mu - \Sigma'_{11} - \Sigma_m)}$  и, в силу  $E_0 \gg \mu$ , имеет вид  $p_0^* \approx \sqrt{4/3mE_0}$ , мы получим  $\omega_{1,2}^{(a)}(p_0^*) = \Omega_0^* - i\gamma_a/2 \pm i\sqrt{\gamma_a^2/4 + \Delta^2}$ . В этом выражении  $\Omega_0^* = 1/2 (E_0 + p^2/4m + 2\mu + \Sigma'_{11} - \Sigma_m) \approx p_0^{*2}/2m$ . Учитывая, что  $\gamma_a \gg \Delta$ , выражение для  $\omega_{1,2}^{(a)}(p_0^*)$  может быть представлено в виде  $\omega_1^{(a)}(p_0^*) \approx \Omega_0^* + i\Delta^2/\gamma_a$ ;  $\omega_2^{(a)}(p_0^*) \approx \Omega_0^* - i\gamma_a$ . Возникновение у функции Грина  $G'(p)$  полюса  $\omega_1^{(a)}(p_0^*)$ , лежащего в верхней полуплоскости частоты  $\omega$ , означает экспоненциальный рост во времени квантовых флуктуаций конденсатного поля с импульсами  $|p| \approx p_0$  и, следовательно, неустойчивость системы. Характерные времена  $\tau_a$  нарастания этих флуктуаций имеют порядок  $1/\tau_a \sim \Delta^2/\gamma_a \sim \mu\alpha$ .

Аналогично системе уравнений Дайсона (6) для  $G'(p)$  может быть написана система уравнений Дайсона для перенормированной функции Грина молекул  $D(p)$  при  $|p| \approx p_0$  и  $\omega \approx -\Omega_0$ . В результате решения этих уравнений пропагатор  $D(p)$  приобретает вид

$$D(p) = \frac{1}{\bar{D}_0^{-1}(p) - \Delta^2 \bar{G}_0(-p)}. \quad (9)$$

Полюса этого пропагатора могут быть легко найдены:  $\omega_1^{(m)}(p_0^*) \approx -\Omega_0^* + i\gamma_a$ ;  $\omega_2^{(m)}(p_0^*) \approx -\Omega_0^* - i\Delta^2/\gamma_a$ . Из этих выражений видно, что инкремент роста во времени пропагатора молекул имеет вид  $1/\tau_m = \gamma_a$ .

В вычислениях, приведенных выше, мы считали, что СЭЧ пропагатора молекулы  $\Sigma_m(-p)$  не содержит мнимой части. Однако, учет процессов, выходящих за рамки лестничного приближения, приводит, вообще говоря, к возникновению отличной от нуля мнимой части  $\Sigma_m(-p)$ . Если учесть эту мнимую часть, полагая ее равной  $\gamma_m$ , спектр элементарных возбуждений системы атомов приобретает вид

$$\omega_{1,2}^{(a)}(p_0^*) = \Omega_0^* + i(\gamma_m - \gamma_a)/2 \pm i\sqrt{(\gamma_m + \gamma_a)^2/4 + \Delta^2}.$$

Таким образом, из проведенного выше рассмотрения следует, что начальное состояние, представляющее собой бозе-конденсат атомов, является неустойчивым, при этом происходит рост флуктуаций конденсатного поля с большими импульсами  $|p| \approx p_0$ , а также флуктуаций, соответствующих процессу рождения молекул из бозе-конденсата атомов. При наличии связанных состояний и отрицательной амплитуды рассеяния на малых энергиях  $f_0 < 0$  неустойчивыми оказываются как моды с малыми импульсами  $p < \sqrt{n_0 |f_0|}$ , так и моды с большими импульсами  $|p| \approx p_0$ , при этом характер неустойчивости на больших импульсах остается таким же как и при  $f_0 > 0$ . Заметим, что наличие внешнего удерживающего потенциала, который присутствует в экспериментах с газами щелочных металлов, не оказывает существенного влияния на рассмотренные выше процессы, поскольку они происходят на больших импульсах. Результатом рассмотренной выше неустойчивости является рождение молекул (и, вообще говоря, более сложных комплексов) из бозе-конденсата атомов, а также искажение начальной функции распределения атомов с рождением атомов, имеющих большие импульсы (а следовательно, разогреву системы атомов), что в конечном итоге приводит к коллапсу системы в жидкое состояние. Несомненно, важным является рассмотрение кинетики развития рассмотренной выше неустойчивости, что предполагается сделать в следующей работе.

Эта работа выполнена при поддержке фонда INTAS-93-285, а также ISI Foundation and EU INTAS Network 1010-CT 930055.

1. J.P.Wolfe, J.L.Lin, and D.W.Snoke, *Bose-Einstein Condensation*, Eds. by A.Griffin, D.W.Snoke, and S.Stringari, Cambridge University Press, 1995.
2. J.L.Lin and J.P.Wolfe, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1222 (1993).
3. M.H.Anderson et al., *Science* **269**, 198 (1995).
4. C.C.Bradley, C.A.Sackett, J.J.Tollett, and R.G.Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
5. K.V.Davis, M.-O.Mewes, M.R.Andrews et al., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
6. С.В.Иорданский, *ЖЭТФ* **47**, 167 (1964).
7. В.С.Бабиченко, *ЖЭТФ* **64**, 612 (1973).
8. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Квантовая механика*, М.: Наука, 1974.
9. А.А.Абрикосов, Л.П.Горьков, И.Е.Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, М.: Физматгиз, 1962; С.Т.Беляев, *ЖЭТФ* **34**, 433 (1958).
10. В.М.Галицкий, *ЖЭТФ* **34**, 151 (1958).