Письма в ЖЭТФ, том 64, вып.12, стр.823 - 828 © 1996г. 25 декабря

О T-ДУАЛЬНОСТИ ПУАССОНА–ЛИ В ДВУМЕРНЫХ $N=2$ СУПЕРКОНФОРМНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

С.Е.Пархоменко

Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН
142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 5 ноября 1996 г.

Предложено суперсимметричное обобщение преобразования T-дуальности Пуассона-Ли. Показано, что $N=2$ суперконформные двумерные модели $WZNW$ обладают естественной симметрией Пуассона–Ли, что позволяет построить Пуассон-Ли T-дуальные σ-модели.

PACS: 11.25.Hf, 11.25.Pm

1. T-дуальность в струнной теории привлекает в последнее время большое внимание в связи с поисками полной симметрии теории струны. Хорошо известный пример T-дуальности это так называемая зеркальная симметрия многообразий Калаби–Яау на которые компактифицируются лишние измерения 10-мерной суперструны [1], [2]. Первоначально T-дуальность была описана в контексте тороидальной компактификации [3]. В простейшем случае одного компактифицированного измерения радиуса R амплитуды рассеяния струн остаются неизменными при замене $R \to \alpha/R$ при условии, что сделана замена дилатонного поля $\phi \to \phi - \log R/\sqrt{\alpha}$ [4]. Позже преобразования T-дуальности были обобщены в [5] на случай неплоской конформной σ-модели. В этой конструкции рассматривается d-мерное многообразие M с антисимметричным тензором b_{ij}, полем дилатона ϕ и метрикой g_{ij}, допускающей некоторую абелеву непрерывную группу изометрий. T-дуальность связанная с абелевой группой изометрий получила название абелевой T-дуальности.

Неабелева T-дуальность [6], [7] является обощением абелевой T-дуальности на случай конформных теорий с неабелевыми группами изометрий. Преобразование неабелевой T-дуальности обладает одной важной особенностью: в то время как, лагранжиан первоначальной σ-модели был изометричным относительно некоторой неабелевой группы, что и позволяло сделать это преобразование, Лагранжиан дуальной модели этой группой симметрий не обладает. В результате не известно как сделать преобразование T-дуальности в обратном направлении.

Решение этой проблемы было недавно предложено в [8], где было показано, что две теории дуальны друг-другу с точки зрения так называемой дуальности Пуассона–Ли.

Результаты работы [8] касаются классических двумерных теорий поля и носят весьма общий характер. Имея ввиду возможные конкретные приложения дуальности Пуассона–Ли в теории суперструны хотелось бы для начала ответить на следующие вопросы. Существуют ли дуальные пары конформных теорий? Существует ли суперсимметричное расширение дуальности Пуассона–Ли и существуют ли дуальные пары суперконформных теорий? В частности наиболее интересной с точки зрения струнных приложений была бы конструкция дуальных пар N=2 суперконформных теорий. Ответ на первый вопрос был дан в работе [9]. Данная заметка посвящена второму вопросу.

2. Теперь мы кратко рассмотрим суперсимметричное обобщение $WZNW$ моделей [10] и сформулируем условия, которым должна удовлетворять группа Ли, чтобы соответствующая $WZNW$ модель обладала N=2 суперконформной симметрией.

Мы используем суперполевой формализм с евклидовыми координатами $z_{\pm}$, и грассмановыми координатами $\Theta_{\pm}$ такими, что

$$\bar{z}_{+} = z_{-}, \quad \bar{\Theta}_{+} = \Theta_{-}. \tag{1}$$

Соответствующие генераторы суперсимметрии и ковариантные производные имеют вид

$$Q_{\pm} = \frac{\partial}{\partial \Theta_{\pm}} - \Theta_{\pm}\partial_{\pm}, \quad D_{\pm} = \frac{\partial}{\partial \Theta_{\pm}} + \Theta_{\pm}\partial_{\pm}, \tag{2}$$

и удовлетворяют следующим антикоммутационным соотношениям

$$\{D_{\pm}, D_{\pm}\} = -\{Q_{\pm}, Q_{\pm}\} = 2\partial_{\pm}, \quad \{Q, D\} = 0, \tag{3}$$

где скобки $\{,\}$ обозначают антикоммутатор. Суперполе суперсимметричной $WZNW$ модели

$$G = g + \Theta_{+}\psi_{+} + \Theta_{-}\psi_{-} + \Theta_{+}\Theta_{-}F \tag{4}$$

принимает значения в (четной) группе G. Мы предполагаем, что ее алгера Ли g имеет ad-инвариантное невырожденное внутреннее произведение $<,>$.

Обратный групповой элемент G^{-1} определяется из соотношения

$$G^{-1}G = 1 \tag{5}$$

и имееет разложение

$$G^{-1} = g^{-1} - \Theta_{+}g^{-1}\psi_{+}g^{-1} - \Theta_{-}g^{-1}\psi_{-}g^{-1} + \Theta_{+}\Theta_{-}g^{-1}(-F + \psi_{-}g^{-1}\psi_{+} - \psi_{+}g^{-1}\psi_{-})g \tag{6}$$

Действие N=1 суперсимметричной $WZNW$ модели имеет вид

$$S_{swz} = \int d^2z d^2\Theta (< R_{+}, R_{-} >) - \int d^2z d^2\Theta dt < G^{-1}\frac{\partial G}{\partial t}, \{R_{-}, R_{+}\} >, \tag{7}$$

где

$$R_{\pm} = G^{-1}D_{\pm}G. \tag{8}$$

Действие (7) инвариантно относительно супер-Кац-Муди и N=1 суперконформных преобразований [10].

Заканчивая описание N=1 суперсимметричной $WZNW$ модели, мы приведем суперсимметричное обобщение формулы Полякова-Вигмана [11]

$$S_{swz}[GH] = S_{swz}[G] + S_{swz}[H] + \int d^2z d^2\Theta < G^{-1}D_{+}G, D_{-}HH^{-1} > \tag{9}$$

В работах [12, 13, 14] были рассмотрены N=1 суперсимметричные $WZNW$ модели, обладающие расширенной суперсимметрией и было показано в [13, 14], что имеется взаимно однозначное соответствие между такими моделями и конечномерными тройками Манина.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [15]. Тройка Манина $(\mathrm{g}, \mathrm{g}_+, \mathrm{g}_-)$ состоит из алгебры Ли g, с невырожденным инвариантным внутренним произведением $<,>$ и изотропными относительно него подалгебрами Ли $\mathrm{g}_\pm$, такими, что $\mathrm{g} = \mathrm{g}_+ \oplus \mathrm{g}_-$ как векторное пространство.

Чтобы связать результаты работ [13, 14] с результатами работ [12] следует сделать следующий коментарий.

Пусть g есть вещественная алгебра Ли и J есть комплексная структура на векторном пространстве g. J будет называться комплексной структурой на алгебре g если J удовлетворяет уравнению

$$[Jx, Jy] - J[Jx, y] - J[x, Jy] = [x, y] \tag{10}$$

для любой пары векторов x, y из g. Предположим, что существует невырожденное внутреннее произведение $<,>$ на g такое, что комплексная структура J кососимметрична относительно $<,>$. В этом случае нетрудно установить соответствие между комплексными тройками Манина и комплексными структурами на алгебрах Ли. Именно, для каждой комплексной тройки Манина $(\mathrm{g}, \mathrm{g}_+, \mathrm{g}_-)$ существует каноническая комплексная структура на алгебре Ли такая, что изотропные подалгебры $\mathrm{g}_\pm$ являются ее $\pm\imath$ собственнами подпространствами. С другой стороны, для каждой вещественной алгебры Ли g с невырожденным инвариантным внутренним произведением и кососимметричной комплексной структурой J на этой алгебре, мы можем рассмотреть ее комплексификацию $\mathrm{g}^{\mathbf{C}}$. Пусть $\mathrm{g}_\pm$ будут $\pm\imath$ собственными подпространствами J в алгебре $\mathrm{g}^{\mathbf{C}}$, тогда $(\mathrm{g}, \mathrm{g}_+, \mathrm{g}_-)$ есть комплексная тройка Манина .

Если комплексная структура на алгебре Ли фиксирована, то определен второй генератор суперсимметрии, расширяющий N=1 супералгебру Вирасоро до N=2 супералгебры [12]. Соответствующая этому случаю конструкция Сугавары была дана в работах [12, 13, 14].

В этой работе мы рассмотрим тройки Манина некомпактных групп с целью проиллюстрировать связь N=2 суперконформной симметрии с T-дуальностью Пуассона–Ли. Компактный случай требует отдельного рассмотрения.

3. В этой секции мы опишем конструкцию Пуассон-Ли T-дуальных σ-моделей к N=2 суперконформным $WZNW$ моделям.

Для описания T-дуальности Пуассона–Ли нам понадобится Ли- групповая версия тройки Манина [16, 17, 18]. Фиксируем некоторую конечномерную комплексную тройка Манина $(\mathrm{g}, \mathrm{g}_+, \mathrm{g}_-)$ и рассмотрим дубль группу Ли $(\mathrm{G}, \mathrm{G}_+, \mathrm{G}_-)$ [17], где экспоненциальные группы $\mathrm{G}, \mathrm{G}_\pm$ соответствуют алгебрам Ли $\mathrm{g}, \mathrm{g}_\pm$. Каждый элемент $g \in \mathrm{G}$ допускает разложение

$$g = g_+ g_-^{-1} \tag{11}$$

В этом случае, для суперконформной $WZNW$ модели на группе G мы получим из (11) разложение для суперполя (4)

$$G(z_+, z_-) = G_+(z_+, z_-) G_-^{-1}(z_+, z_-) \tag{12}$$

В силу (12), (9) и определения 2.1 мы можем переписать действие (7) этой модели в виде

$$S_{swz} = -\int d^2z d^2\Theta < \rho_+^+, \rho_-^- >, \tag{13}$$

где суперполя

$$\rho^{\pm} = G_{\pm}^{-1} D G_{\pm} \tag{14}$$

соответствуют правоинвариантным 1-формам на группах $G_{\pm}$.

Чтобы обобщить (11) мы должны рассмотреть множество W классов $G_{+} \backslash G / G_{-}$ и выделить представителя w для каждого класса $[w] \in W$ [18]:

$$G = \bigcup_{[w] \in W} G_{+} w G_{-} = \bigcup_{[w] \in W} G_{W} \tag{15}$$

Эта формула означает, что имеется естественное действие группы $G_{+} \times G_{-}$ на G, и множество W параметризует $G_{+} \times G_{-}$-орбиты G_{W}.

Соответствующее обобщение действия (13) имеет вид

$$S_{swz} = -\int d^2 z d^2 \Theta < \rho_{+}^{+}, w \rho_{-}^{-} w^{-1} > \tag{16}$$

Следуя работе [8] мы рассмотрим вариацию действия (16) суперконформной $WZNW$ модели на группе G при правом действии $G_{+} \times G_{-}$. Рассмотрим сперва класс единицы из множества (15).

$$\delta S_{swz} = -\int d^2 z d^2 \Theta (< D_{+} X^{+}, \rho_{-}^{-} > - < D_{-} X^{-}, \rho_{+}^{+} >) +$$
$$\int d^2 z d^2 \Theta (< X^{+}, \{\rho_{+}^{+}, \rho_{-}^{-}\} > - < X^{-}, \{\rho_{-}^{-}, \rho_{+}^{+}\} >), \tag{17}$$

где $X^{\pm} = G_{\pm}^{-1} \delta G_{\pm}$. Используя (17) мы получаем Нетеровы токи $\rho_{\pm}^{\pm}$, удовлетворяющие на экстремалях уравнению нулевой кривизны для F_{+-}- компоненты супертензора напряженности F_{MN}

$$F_{+-} = \{D_{+} + \rho_{+}^{+}, D_{-} + \rho_{-}^{-}\} = 0, \tag{18}$$

где скобки $\{,\}$ соответствуют скобкам Ли на g. Используя стандартные аргументы суперсимметричного представления Лакса [19] можно показать, что из (18) следует, что связность плоская

$$F_{MN} = 0, \quad M, N = (+, -, +, -). \tag{19}$$

Уравнения (18) являются суперсимметричным обобщением условий существования симметрии Пуассона–Ли [8]. В самом деле, токи $\rho_{\pm}^{\pm}$ являются генераторами действия $G_{+} \times G_{-}$ на G, в то время как, структурные константы из (18) соответствуют алгебре Ли g, которая является дуальной по Дринфельду к алгебре $g_{+} \oplus g_{-}$ [20]. В силу (19) мы можем связать с каждой экстремальной поверхностью $G_{+}(z_{+}, z_{-}, \Theta_{+}, \Theta_{-})$ отображение $G(z_{+}, z_{-}, \Theta_{+}, \Theta_{-})$ мирового суперлиста в группу G так, что

$$L_{\pm}^{\pm} + \rho_{\pm}^{\pm} = 0, \tag{20}$$

$$L_{\mp}^{\pm} = 0, \tag{21}$$

где $L^{\pm} = P^{\pm} L$, где $P^{\pm}$ – проекторы на изотропные подалгебры, $L = DGG^{-1}$, $G \in G$.

Можно переписать (20), (21) как уравнения на дубле Дринфельда [15] группы G. Пусть

$$\mathrm{D} = \mathrm{G} \times \mathrm{G} \tag{22}$$

Для каждой пары суперполей $\Lambda = (G_1, G_2) \in \mathrm{D}$ существует разложение

$$\Lambda = (G_+, G_-)(G, G) = H\tilde{H}, \tag{23}$$

где $H = (G_+, G_-)$, $\tilde{H} = (G, G)$. Уравнения (20), (21) могут быть переписаны в виде

$$\ll D_\pm \Lambda\Lambda^{-1}, E^\mp \gg = 0, \tag{24}$$

где $\ll, \gg$ обозначает естественное внутреннее произведение на алгебре Ли группы D и подпространства $E^\pm$ задаются формулой

$$E^+ = (0, \mathrm{g}), \quad E^- = (\mathrm{g}, 0) \tag{25}$$

Уравнения (24), с заданными соответсвующим образом взаимно ортогональными подпространствами $E^\pm$, являются суперсимметричным обобщением соответствующих уравнений из работы [8]. В случае общего положения подпространств $E^\pm$ (что соответствует невырожденности билинейной формы, определяющей лагранжиан σ-модели), действие дуальной σ-модели можно найти, воспользовавшись конструкцией [8]. В нашем случае подпространства (25) не находятся в общем положении и билинейная форма, определяющая лагранжиан N=2 суперконформной $WZNW$ модели вырождена, что видно из (13). Поэтому невозможно напрямую применить конструкцию [8]. Вместо этого мы используем метод, разработанный в [9].

Предположим, что вместо (23) мы используем другое разложение

$$\Lambda = \tilde{F}F, \tag{26}$$

где $F = (U_+, U_-)$, $\tilde{F} = (U, U)$. Учитывая (25) мы переписываем (26) в виде

$$R^\pm_\pm + \lambda^\pm_\pm = 0, \tag{27}$$

$$R^\pm_\mp = 0, \tag{28}$$

где $R^\pm = P^\pm R$, где $P^\pm$ – проекторы на изотропные подалгебры $R = U^{-1}DU$, $U \in \mathrm{G}$, $\lambda^\pm_\pm = D_\pm U_\pm U_\pm^{-1}$, $U_\pm \in \mathrm{G}_\pm$. В дуальной картинке мы должны были бы иметь функционал действия дуальной σ-модели на группе G и действие группы G на себе такое, что Нетеровы токи удовлетворяли бы уравнению нулевой кривизны для F_{+-}-компоненты супертензора напряженности, принимающего значения в алгебре Ли $\mathrm{g}_+ \oplus \mathrm{g}_-$, которая является двойственной по Дринфельду к g. Но в силу условия (28) действие дуальной σ-модели должно содержать соответствующий Лагранжев множитель. Используя аргументы [9] можно написать дуальное действие в виде

$$\tilde{S}_{swz} = -\int d^2z d^2\Theta(< \lambda^+_+, \lambda^-_- > + < R_+, \lambda_- > + < \lambda_+, R_- >) \tag{29}$$

Из (29) легко видеть, что токи λ^+_-, λ^+_- играют роль Лагранжевых множителей (со значениями в $\mathrm{g}_+ \oplus \mathrm{g}_-$). Соответствующие уравнения движения, кроме уравнений (27), (28) включают уравнение нулевой кривизны

$$\tilde{F}_{+-} = \{D_+ - \lambda^+_+ + \lambda^-_+, D_- - \lambda^-_- + \lambda^+_-\} = 0, \tag{30}$$

где скобки $\{,\}$ соответствуют скобкам Ли на алгебре $g_+ \oplus g_-$. Исключая из (29) все λ кроме Лагранжевых множителей мы получим

$$\tilde{S}_{swz} = -\int d^2zd^2\Theta(< R_+^+, R_-^- > + < R_+^-, \lambda_-^+ > + < \lambda_+^-, R_-^+ >) \tag{31}$$

Теперь обратимся к оставшимся смежным классам (15). Обобщение формул (18), (20), (21) непосредственное. В каждом классе $[w]$ Нетеровы токи ρ_{w+}^+ and ρ_{w-}^- принимают значения в $g_+^W = w^{-1}g_+w \cup g_+$ и $g_-^W = wg_-w^{-1} \cup g_-$ соответственно , в то время как, токи L_{w+}^- и L_{w-}^+ принимают значения в дополнениях $g \setminus g_+^W$ и $g \setminus g_-^W$:

$$F_{w+-} = \{D_+ + \rho_{w+}^+, D_- + \rho_{w-}^-\} = 0 \tag{32}$$

$$L_{w\pm}^{\pm} + \rho_{w\pm}^{\pm} = 0, \tag{33}$$

$$L_{w\mp}^{\pm} = 0, \tag{34}$$

Аргументы, используемые при получении (31) можно применить (с соответствующими модификациями) в каждом классе $[w]$. Используя (32), (33), (34) получаем действие Пуассон-Ли T-дуальной σ-модели, обобщающее (31)

$$\tilde{S}_{swz} = -\int d^2zd^2\Theta(< R_{w+}^+, R_{w-}^- > + < R_{w+}^-, \lambda_{w-}^+ > + < \lambda_{w+}^-, R_{w-}^+ >), \tag{35}$$

где R_{w+}^+ и R_{w-}^- принимают значения в тех же подпространствах, что токи ρ_{w+}^+ и ρ_{w-}^-, а токи R_{w+}^- и R_{w-}^+ принимают значения в дополнениях $g \setminus g_+^W$ и $g \setminus g_-^W$, соответственно. Автор благодарен А.Кадейшвили, И.Полюбину и Б.Фейгину за обсуждения. Работа частично поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований 96-02-16507 и грантом ИНТАС-95-IN-RU-690.

1. P.Candelas, X.C.de la Ossa, P.S.Green, L.Parkes, Nucl. Phys. **B359**. 21 (1991).
2. P.Candelas, et al., Nucl. Phys. **B341**, 383 (1990).
3. L.Brink, M.B.Green, J.H.Schwartz, Nucl.Phys. **B198**, 474 (1982); K.Kikkawa, M.Yamasaki, Phys. Lett. **B149**, 357 (1984).
4. E.Alvarez, M.A.R.Osorio, Phys. Rev. **D40**, 1150 (1989).
5. T.H.Busher, Phys. Lett. **B949**, 51 (1987); Phys. Lett. **B201**, 466 (1988).
6. X.De la Ossa, F.Quevedo, Nucl. Phys. **B403**, 377 (1993);
7. A.Giveon, M.Rocek, Nucl. Phys **B421**, 173 (1994).
8. C.Klimčik, P.Ševera, Phys. Lett. **B351**, 455 (1995).
9. A.Yu.Alekseev, C.Klimčik, A.A.Tseytlin, Quantum Poisson-Lie T-duality and *WZNW* model, CERN-TH/95251 hep-th/9509123.
10. P.DI Veccia, V.G.Knizhnik, J.L.Petersen, P.Rossi, Nucl.Phys. **B253**, 701 (1985).
11. A.M.Polyakov, P.B.Wiegmann, Phys. Lett. **B131**, 121 (1983).
12. Ph.Spindel, A.Sevrin, W.Troost, A. van Proeyen, Nucl. Phys. **B308**, 662 (1988); Nucl. Phys. **B311**, 465 (1988/89).
13. S.E.Parkhomenko, Mod. Phys. Lett. **A11**, 445 (1996).
14. С.Е.Пархоменко, ЖЭТФ **102**, 3 (1992).
15. V.G.Drinfeld, Quantum groups, Proc. Int. Cong. Math., Berkley, Calif. 798 (1986).
16. M.A.Semenov-Tian-Shansky, Dressing Transformations and Poisson-Group Actions, RIMS, Kyoto Univ. **21**, 1237 (1985).
17. J.-H.Lu, A.Weinstein, J. Diff. Geom. **31**, 501 (1990).
18. A.Yu.Alekseev and A.Z.Malkhin, Commun. Math. Phys. **162**, 147 (1994).
19. J.Evans and T.Hollowood, Nucl. Phys. **B352**, 723 (1991).
20. V.G.Drinfeld, DAN SSSR **262**, 285 (1983).