

## КИНЕТИКА ДВУМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ НА ИСКРИВЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*Л.И.Магарилл<sup>1)</sup>, Д.А.Романов, А.В.Чаплик*

*Институт физики полупроводников СО РАН  
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 9 августа 1996 г.

Рассматривается ряд эффектов, связанных с кривизной поверхности, на которую помещен двумерный (2D) электронный газ. Во внешнем магнитном поле (которое становится эффективно неоднородным для 2D электронов) наиболее существенным является снятие вырождения уровней Ландау. На примере кругового цилиндра найдены поправки к константе Холла, интенсивность и форма линии (неоднородно уширенной) циклотронного резонанса при разных поляризациях. Для квазиодномерной квантовой проволоки в виде полого цилиндра выявлена картина квантования контактанса, качественно отличающаяся от случая плоской полосы. Показано, что в противоположность плоскому случаю спектр 2D электронов на кривой поверхности чувствителен к знаку константы спин-орбитальной связи (при заданном знаке кривизны). Для гетеропереходов, например, это открывает новые возможности извлечения информации об их "скрытых параметрах".

PACS: 73.20.Dx

Поведение 2D электронов, помещенных на искривленную поверхность, уже рассматривалось в литературе [1]. Сурис и Роткин [2] изучали классические плазменные колебания сферической оболочки, имея в виду применение полученных результатов к фуллеренам. В работе [3] решена задача о спектре электронов на сфере в магнитном поле. Спектр является, естественно, полностью дискретным, зависящим от двух квантовых чисел.

В предлагаемой работе мы интересуемся, главным образом, влиянием кривизны поверхности на транспортные свойства электронов в баллистическом режиме. Все рассмотрение ведется на примере кругового цилиндра или цилиндрического сектора.

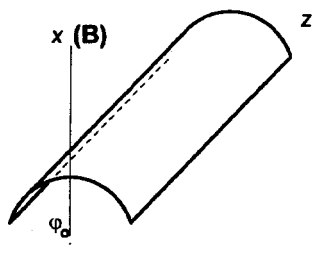


Рис.1. Цилиндрический сектор в магнитном поле

1. **Эффект Холла в цилиндрическом секторе.** Рассмотрим, прежде всего, цилиндрический сектор  $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$  радиуса  $R$  (см. рис. 1) в однородном магнитном поле  $B$ , параллельном  $x$  (вектор-потенциал  $A_z = By$ ,  $A_x = A_y = 0$ ), и в присутствии электрического поля  $F$ , направленного вдоль дуги  $[-\varphi_0, \varphi_0]$

<sup>1)</sup> e-mail: levmm@isp.nsc.ru

(считаем, что полюса батареи подключены к крайним образующим сектора  $\varphi = \pm\varphi_0$ ). В этом разделе для простоты изложения мы не будем учитывать спин электрона. После отделения  $x$ -координаты ( $\Psi = \psi(\varphi) \exp(ik_z z)$ ) уравнение Шрёдингера принимает вид

$$-\frac{\hbar}{2mR^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \left[ eF\varphi + \frac{m\Omega^2 a^2}{2} \left( \sin \varphi + k \frac{l_B^2}{R^2} \right)^2 \right] \psi = E\psi, \quad (1)$$

где  $k = Rk_z$ ,  $\Omega = eB/mc$ ,  $l_B$  – магнитная длина. Будем считать  $\varphi_0 < \pi/2$  и интересоваться током  $j_z$ , текущим в  $z$ -направлении.

Оставляя детальный анализ задачи для более подробной статьи, ограничимся здесь основным вкладом в холловский ток, происходящим от электронов с  $|k| < \sin \varphi_0 (R/l_B)^2$ . Последнее неравенство означает, что точка подвеса осциллятора Ландау лежит внутри сектора, и мы пренебрегаем, таким образом, вкладом краевых магнитных состояний. Считая  $l_B \ll R$  (сильное магнитное поле), можно разложить потенциал в уравнении (1) вблизи его минимума  $\varphi_k = \arcsin(kl_B^2/R^2)$  и получить для энергии

$$E_n(k) = \hbar\Omega_k \left( n + \frac{1}{2} \right) + eRF \arcsin \left( k \frac{l_B^2}{R^2} \right) - \frac{e^2 F^2}{2m\Omega^2 \left( 1 - k^2 \frac{l_B^4}{R^4} \right)}, \quad (2)$$

$$\Omega_k \equiv \sqrt{1 - k^2 \left( \frac{l_B}{R} \right)^4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Это весьма прозрачный результат: спектр Ландау с "местным" значением нормальной компоненты магнитного поля  $\Omega_k = \Omega \cos \varphi_k$ . Уже в этом простейшем приближении возникают поправки к обычному выражению для холловской проводимости. Вычисляя среднюю плотность тока  $j_z = I_z/2R\varphi_0$  в баллистическом режиме, мы получаем в ультраквантовом пределе (заселена лишь нижайшая зона Ландау, то есть  $n = 0$  в уравнении (2), что возможно при  $\cos \varphi_0 > 1/3$ )

$$j_z = G_0 F \left[ 1 - \frac{\arcsin(\sin \varphi_0 - \varphi_0 \pi N_s l_B^2)}{\varphi_0} \right], \quad (3)$$

где  $G_0 = 2e^2/h$  – квант кондактанса,  $N_s$  – поверхностная плотность носителей. Для  $\varphi_0 \ll 1$  имеем

$$\sigma_{z\varphi} = \frac{N_s e c}{B} + \frac{e^2 \varphi_0^2}{6h} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\nu}{2} \right)^3 \right], \quad (4)$$

где  $2\pi N_s l_B^2 \equiv \nu$  – фактор заполнения.

Второе слагаемое в (4) есть поправка на кривизну. При заселении более чем одной зоны Ландау необходимо различать ситуации перекрывающихся и неперекрывающихся зон. В последнем, наиболее простом, случае холловский ток равен  $(2e^2/h)Fm + j_z$ , где  $m$  – число полностью заполненных зон, а  $j_z$  дается выражением (3) с добавленным слагаемым  $m\varphi_0$  под аргументом арксинуса.

**2. Циклотронный резонанс в цилиндрическом секторе.** Пусть электромагнитная волна, описываемая вектор-потенциалом  $\vec{A}(t)$ , распространяется вдоль

оси  $x$ . Тогда оператор ее взаимодействия с электронами в линейном по  $\tilde{A}$ -приближении имеет вид

$$H_{int} = \frac{e}{mc} \tilde{A}_z(t) \left( -i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{e}{c} B y \right) + \frac{e}{mc} \tilde{A}_y(t) \left( -i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (5)$$

Легко показать, что интенсивность поглощения поляризации, параллельной оси  $z$ , пропорциональна  $\int \cos \varphi_k \delta(\omega - \Omega_k) dk$ , а при поляризации, параллельной оси  $y$ , имеем  $\int \cos^3 \varphi_k \delta(\omega - \Omega_k) dk$ . Таким образом, для формы линий циклотронного резонанса находим

поляризация вдоль образующей цилиндра

$$I(\omega) \sim \frac{(\omega/\Omega)^2}{\sqrt{1 - (\omega/\Omega)^2}} \theta(\omega - \Omega \cos \varphi_0) \theta(\Omega - \omega), \quad (6)$$

поляризация перпендикулярна образующей

$$I(\omega) \sim \frac{(\omega/\Omega)^4}{\sqrt{1 - (\omega/\Omega)^2}} \theta(\omega - \Omega \cos \varphi_0) \theta(\Omega - \omega), \quad (7)$$

где  $\theta(x)$  – функция Хевисайда.

3. Спин-орбитальное расщепление и проводимость полого цилиндра. Другим физическим механизмом проявления кривизны поверхности в явлениях баллистического транспорта является эффективное спин-орбитальное (СО) взаимодействие в гетероструктурах. Как известно, в случае асимметричной квантовой ямы гамильтониан квазидвумерных электронов содержит специфический СО член [4,5]

$$\hat{V}_{SO} = \alpha [\hat{\sigma}, \hat{p}] n, \quad (8)$$

где  $\hat{\sigma}_i$  – матрицы Паули,  $n$  – направление нормали,  $\alpha$  – эффективная спин-орбитальная константа, которая определяется атомной структурой гетерограницы. В случае плоской системы энергетический спектр электрона зависит только от  $|\alpha|$ , так что знак  $\alpha$  является физически ненаблюдаемой величиной.

Положение, однако, существенно меняется, если 2D электроны расположены на искривленной поверхности. В этом случае неэквивалентность двух направлений нормали может привести к появлению зависимости спектра от знака  $\alpha$  (который, разумеется, должен войти в выражения в комбинации со знаком кривизны поверхности). Поэтому измерения  $\alpha$ -зависящих характеристик таких систем могут определить знак  $\alpha$  и, следовательно, дать дополнительную информацию о механизмах эффективного СО взаимодействия.

Мы исследуем влияние эффективного СО взаимодействия на продольную баллистическую проводимость полого кругового цилиндра. Предполагая, что радиус цилиндра  $R$  существенно больше постоянной решетки, мы можем воспользоваться выражением (8) для цилиндрически искривленной поверхности. Тогда, в цилиндрических координатах  $(z, \rho, \varphi)$ ,

$$\hat{V}_{SO} = -i\alpha \left( \hat{\sigma}_z \frac{\partial}{R \partial \varphi} + \begin{pmatrix} 0 & ie^{-i\varphi} \\ -ie^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (9)$$

Мы ищем электронную волновую функцию в виде плоской волны (с волновым числом  $k_z$ ), распространяющейся вдоль цилиндра, и используем безразмерные единицы

$$\epsilon = 2m^* R^2 E / \hbar^2; \quad \bar{\alpha} = 2\alpha m^* R. \quad (10)$$

Вследствие циклических граничных условий  $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$  полный угловой момент  $j = l_z + \sigma_z/2$  (сумма  $z$ -ых компонент орбитального и спинового угловых моментов) является интегралом движения и квантуется:  $j = l + 1/2$ , где  $l$  - целое. Энергетический спектр электрона имеет вид

$$\epsilon_{j,\mu}(k) = k^2 + j^2 + \frac{(\bar{\alpha} - 1)^2}{4} + \mu \sqrt{j^2(\bar{\alpha} - 1)^2 + (k\bar{\alpha})^2}, \quad (11)$$

где  $\mu = \pm 1$  - квантовое число, нумерующее две ветви спиново-расщепленного закона дисперсии. Как видно, спектр явным образом зависит от знака  $\alpha$ . Заметим, что безразмерный параметр  $\bar{\alpha}$  здесь не является малым (см. его численные значения на рис.2).

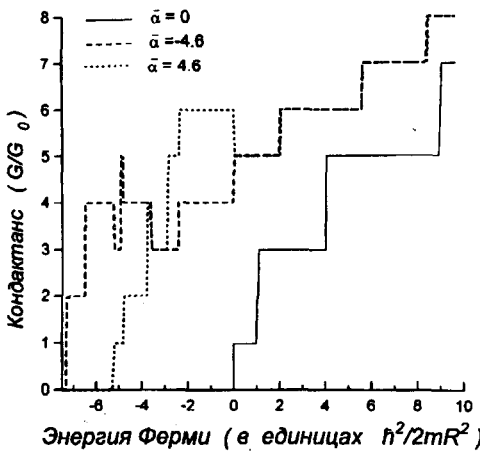


Рис.2. Кондактанс полого цилиндра как функция энергии Ферми при разных знаках эффективной спин-орбитальной константы для случая гетероструктуры GaAs/GaAlAs. Радиус цилиндра  $R = 1$  мкм;  $\alpha = 0$  (сплошная кривая),  $\bar{\alpha} = -4.6$  (штриховая кривая),  $\bar{\alpha} = 4.6$  (пунктир)

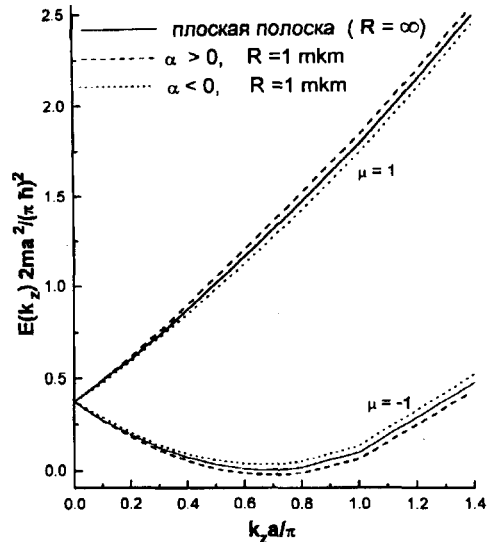


Рис.3. Энергетический спектр первой подзоны поперечного квантования в цилиндрическом секторе в сравнении со случаем плоской полосы, сплошная кривая (для гетероструктуры InAs/GaSb); штриховая кривая -  $\alpha > 0$ , пунктир -  $\alpha < 0$ ;  $R = 1$  мкм. Ширина полосы  $\alpha = 2R\varphi_0 = 0.3$  мкм

Полученный энергетический спектр определяет продольный баллистический кондактанс цилиндра как функцию энергии Ферми  $\epsilon_F$ . Применяя известную формулу для кондактанса многоканальной квазиодномерной системы при нулевой температуре [6] к случаю нашего закона дисперсии, мы получаем

$$G(\epsilon_F) = \frac{G_0}{2} \sum_{j,\mu} \sum_i \theta \left( k_i(\mu, j) + \frac{\mu k_i(\mu, j) \bar{\alpha}^2}{\sqrt{j^2(\bar{\alpha} - 1)^2 + (k_i(\mu, j) \bar{\alpha})^2}} \right), \quad (12)$$

где  $k_i(\mu, j)$  являются корнями уравнения  $\varepsilon_{\mu, j}(k_i) = \varepsilon_F$ . Кривые  $G(\varepsilon_F)$  для типичного случая гетероструктуры GaAs/AlGaAs ( $\alpha = 2.5 \cdot 10^{-10}$  эВ·см [7] и радиуса цилиндра 1 мкм приведены на рис. 2. Они существенно отличаются от обычной "лестницы", характерной для квантованной проводимости одномерных каналов. Наличие провалов определяется снятием вырождения в точке  $k = 0$  в формуле (11). Видно, что при изменении знака  $\alpha$  вид зависимости  $G(\varepsilon_F)$  значительно изменяется.

4. Спин-орбитальное расщепление в цилиндрическом секторе. Мы рассмотрели также ситуацию, возможно более близкую к экспериментальной реализации: "квантовую полосу" в виде цилиндрического сектора  $\rho = R$ ,  $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ . (В принципе,  $\varphi_0$  может быть сколь угодно большим — ситуация "рулона".) Основное (и очень существенное!) отличие этой ситуации от случая полного цилиндра состоит в изменении граничных условий для электронной волновой функции с периодических на нулевые. Не приводя здесь громоздкого дисперсионного уравнения, мы ограничимся качественным обсуждением дисперсионных кривых, полученных в результате его численного решения для гетероперехода InAs/GaSb с  $\alpha = 0.9 \cdot 10^{-9}$  эВ·см [8] (рис. 3).

Как видно, зависимость от знака  $\alpha$  отсутствует в плоской полосе ( $R \rightarrow \infty$ ,  $\varphi_0 \rightarrow 0$ ,  $R\varphi_0 = \text{const}$  (полуширина)), но появляется при конечных  $R$ . Однако вырождение при  $k = 0$  в этом случае не снимается, и провалы на квантовых ступеньках проводимости будут отсутствовать. Это указывает на топологическую природу провалов (эффект типа фазы Берри).

5. Эволюция проводимости "надрезаемого" цилиндра. Остановимся, наконец, еще на одной особенности баллистического транспорта, связанной с неодносвязностью искривленной поверхности. Эта особенность носит общий характер и не зависит от наличия внешних полей и специфических механизмов проявления кривизны.

Мы рассмотрим 2D электронный газ, помещенный на поверхность кругового цилиндра, причем на этот раз без учета взаимодействия (9). Отметим, тем не менее, принципиальное (топологического происхождения) отличие этой ситуации от случая "обычной" квантовой проволоки в виде полоски. Действительно, энергетический спектр такой квантовой полоски начинается с некоторой положительной энергии (нулевая энергия поперечного квантования). Эта энергия лежит выше основного уровня соединяемых полоской электронных резервуаров. Следовательно, зависимость квантованной проводимости полоски от энергии Ферми начинается с нулевого значения. В случае же цилиндра поперечное квантование соответствует спектру плоского ротатора, который, как известно, начинается с нулевой энергии. Поэтому квантованная проводимость цилиндрической квантовой проволоки будет начинаться с  $G_0$ . Поскольку, однако, отличие обусловлено ротационной симметрией цилиндра, оно должно исчезать при нарушении этой симметрии (например, поперечным электрическим полем).

Мы проследили эволюцию картины проводимости в простой точно решаемой модели, когда поперечный потенциал представляется  $\delta$ -функцией:

$$V(\varphi) = V_0 \delta(\varphi), \quad V_0 > 0. \quad (13)$$

В безразмерных единицах  $g = 2mV_0R^2/\hbar^2$ , и поперечный спектр  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon - k^2$  определяется дисперсионным уравнением

$$(2\lambda \sin(\pi\lambda) - g \cos(\pi\lambda)) \sin(\pi\lambda) = 0, \quad \lambda^2 = \bar{\varepsilon}, \quad (14)$$

хорошо известным из задачи Кронига–Пенни. Наиболее существенным здесь является снятие двукратного вырождения при конечных  $g$ . При  $g \rightarrow 0$  корни  $\lambda$  стремятся к целочисленным значениям, то есть восстанавливаются вырожденные решения "идеального" цилиндра. В противоположном предельном случае,  $g \rightarrow \infty$ , корни  $\lambda$  стремятся к полуцелым значениям  $\lambda_\infty = n/2$ , где  $n$  – целое. Это соответствует ситуации квантовой полоски с шириной, равной периметру цилиндра.

Движение корней  $\lambda$  при "надрезании" цилиндра соответствует следующей эволюции квантованных ступенек проводимости. Проводимость идеального цилиндра начинается с конечного значения  $G = G_0$  и демонстрирует квантовые ступени высотой  $2G_0$ . При конечной амплитуде  $\delta$ -потенциала каждая из таких ступенек расщепляется на две, высотой  $G_0$  каждая. При дальнейшем увеличении потенциала эти полуступени отходят друг от друга, стремясь занять эквидистантное (по импульсу Ферми) положение, характерное для квантовой полосы.

В ситуации цилиндра с двумя диаметрально противоположными  $\delta$ -функциональными "надрезами", которая более близка к экспериментальной реальности, все рассуждения аналогичны предыдущим, с той только разницей, что эволюция ступеней проводимости не заканчивается установлением эквидистантного порядка. Движение ступеней продолжается и далее, вплоть до нового слияния при  $g \rightarrow \infty$ , когда исходная картина идеального цилиндра как бы восстанавливается, но оказывается сдвинутой на  $G_0$  вниз.

В заключение заметим, что найденная разница в  $G_0$  между проводимостью квантового цилиндра и квантовой полоски шириной  $2\pi R$  сохраняется и при  $R \rightarrow \infty$ . Таким образом, в явлениях баллистического транспорта эквивалентность нулевых и циклических граничных условий в макроскопическом пределе нарушается, причем рассогласование определяется универсальной константой  $G_0$ . Однако при переходе к диффузионному транспорту рассматриваемая эквивалентность восстанавливается. Действительно, уравнение на так называемый *диффузон* похоже на обычное уравнение Шрёдингера, но предполагает другие граничные условия — равенство на границе нулю не самой функции, а ее нормальной производной [9]. При таких граничных условиях, естественно, уже не будет разницы между цилиндром и полосой.

- 
1. В.М.Набутовский, Д.А.Романов, ЖЭТФ **90**, 232 (1986).
  2. В.В.Роткин, Р.А.Сулис, ФТТ **36**, 1899 (1994).
  3. H.Aoki and H.Suzawa, Phys.Rev. **A46**, R1163 (1992).
  4. Ф.Т.Васько, Письма в ЖЭТФ **30**, 574 (1979).
  5. Ю.А.Бычков, Э.И.Рашба, Письма в ЖЭТФ **39**, 66 (1984).
  6. C.W.J.Beenakker and H. van Houten, *Quantum Transport in Semiconductor Nanostructures*, in: Solid State Physics, v.44, Academic Press, Boston, 1991.
  7. E.I.Rashba, V.I.Sheka, in: *Landau Level Spectroscopy*, Eds. G.Landwehr and E.I.Rashba, Elsevier, 1991, p.178.
  8. J.Luo, H.Munekata, F.F.Fang, and P.J.Stiles, Phys.Rev. **B41**, 7685 (1990).
  9. B.L.Altshuler, A.G.Aronov, D.E.Khmelnitskii, and A.I.Larkin, in: *Quantum Theory of Solids*, Ed. I.M.Lifshits, Moscow, Mir Publishers, 1982, p.195.