Письма в ЖЭТФ, том 42, вып. 4, стр. 182 – 184 *25 августа 1985 г.*

ТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ГЕЛЛ-МАННА – ЛОУ В СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

А.И.Вайнштейн, В.И.Захаров, М.А.Шифман

Найдена точная β-функция в СКЭД. Прослежена связь между вторым и более высокими коэффициентами и инфракрасной регуляризацией

Хорошо известно, что разложение по константе связи в суперсимметричных моделях [1] обладает некоторыми "чудесными" свойствами. Так, для F-членов поправки отсутствуют вовсе [2], а для β-функции в $N = 2$ калибровочной теории они исчерпываются первой петлей [3]. Еще более удивительными представляются те случаи, когда ряд теории возмущений не обрывается, но может быть найден точно. Первый пример такого рода – β-функция в суперсимметричной глюодинамике, которая была вычислена в [4]. Эта работа основывалась на рассмотрении одноинстантонной амплитуды. Если эта амплитуда известна точно в терминах затравочных параметров (а это именно так, см. [4]), то перенормируемость теории фиксирует точную β-функцию. Скажем, для калибровочной группы $SU(N_c)$

$$\beta(\alpha_s) = -\frac{\alpha_s^2}{2\pi}\ \frac{3N_c}{[1-(N_c\alpha_s/2\pi)]}\ . \tag{1}$$

Ключевой момент – отсутствие графиков с двумя, тремя и т.д. петлями в инстантонном фоновом поле [4]. Позднее было осознано, что этот факт – лишь частный случай общей ситуации. Именно, если рассматривается суперсимметричная калибровочная теория при $d = 4$, регуляризованная как в ультрафиолетовой так и в инфракрасной областях (при $d = 4$), то вычисление эффективного действия во внешнем поле сводится к одной петле. Утверждение об одной петле (в форме вопросительного замечания) сформулировано в заключительном абзаце работы [5]. Специально этой проблеме – связи между отсутствием высших петель в эффективном действии и инфракрасной регуляризацией – посвящена работа [6].

В настоящей статье мы разовьем эту идею в плане практических приложений. Будет получено следующее точное соотношение в суперсимметричной электродинамике (СКЭД):

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\pi}\ (1+\gamma_m), \tag{2}$$

где β – функция Гелл-Манна – Лоу, $\beta(\alpha_0) = d\alpha_0/d\ln M_0$, а γ_m – аномальная размерность массы (электрона)

$$\gamma_m = -d\ln m_0/d\ln M_0,$$

M_0 – ультрафиолетовое обрезание, значок "о" помечает голые величины. В однопетлевом приближении $\gamma_m = \frac{\alpha}{\pi} + \ldots$, так что

$$\beta^{(2)}/\beta^{(1)} = \alpha/\pi, \tag{4}$$

в согласии со стандартными расчетами[1)] ($\beta^{(i)}$ – i-ый коэффициент в β-функции). По k-петлевому коэффициенту в γ_m мы узнаем $(k+1)$-петлевой коэффициент в β. Отметим, что если SUSY не нарушена, то аномальная размерность массы лишь знаком отличается от аномальной размерности поля материи, $\gamma_{(\psi)} = d\ln Z/d\ln M_0 = -\gamma_m$.

Хотя в СКЭД инстантоны отсутствуют, общая логика при выводе (2) та же, что и в работе [4]. Именно, теория инфракрасно регуляризуется введением массы материи. После этого мы находим выражение для физического заряда в области импульсов ниже массы через затравочные параметры. Это выражение сводится к однопетлевому. Затем требуем, чтобы явная зависимость от массы регулятора M_0 компенсировалась неявной зависимостью, которая входит через голые величины, α_0 и m_0 (затравочная масса электрона). Таким образом, приходим к (2).

Отличие от [4] состоит в том, что в [4] инфракрасная регуляризация обеспечивалась инстантонным фоновым полем, по которому разложения не проводилось. В СКЭД мы разлагаем по фоновому полю, а инфракрасная регуляризация достигается введением массы полям материи.

Напомним, что исходное действие СКЭД имеет вид

$$S_{\text{СКЭД}} = \frac{1}{4e_0^2}\int d^4x d^2\theta W^2 + \frac{1}{4}\int d^4x d^2\theta d^2\bar\theta(\bar T e^V T + \bar U e^{-V} U) + \left(\frac{m_0}{2}\int d^4x d^2\theta TU + \text{э.с.}\right), \tag{5}$$

где T и U – два киральных суперполя с зарядами +1 и −1 соответственно, m_0 – затравочная масса. Ультрафиолетовая четырехмерная регуляризация, сохраняющая SUSY, обеспечивается введением полей Паули – Вилларса $T^{(i)}$, $U^{(i)}$ с массами M_i для материи плюс высшие производные для калибровочного поля V. Тогда мы имеем хорошо спадающий в импульсном пространстве пропагатор.

Перенормированный заряд e^2 определяется как коэффициент при W^2 в эффективном действии, $S_{\text{эфф}} = \frac{1}{4e^2}\int d^4x d^2\theta W^2$. Коэффициент перед этой структурой удобно вычислять по суперграфам в методе внешнего поля [8], который гарантирует суперкалибровочную инвариантность по внешнему полю. В общем случае петлевые вклады в эффективном действии сводятся к

$$\int d^4x d^2\theta d^2\bar\theta f(x,\theta,\bar\theta), \tag{6}$$

где f – некоторая функция, обладающая суперкалибровочной инвариантностью по отношению ко внешнему полю. Тогда простой анализ размерностей показывает, что (при условии инфракрасной регуляризации) структуры типа (5) не возникают, и $\Delta S_{\text{эфф}} = 0$. Единственное исключение – однопетлевой график с киральным суперполем внутри. (Подробнее см. [4-6]). Вклад такого графика не сводится к виду (6) и не равен нулю.

В итоге, *точное* выражение для эффективного действия в СКЭД в низкоэнергетическом пределе $p \ll m$ имеет вид

$$S_{\text{эфф}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{e_0^2} + \frac{1}{8\pi^2}\ln\frac{M_0^2}{m_0^2}\right)\int d^4x d^2\theta W^2 + \text{э.с.} \tag{7}$$

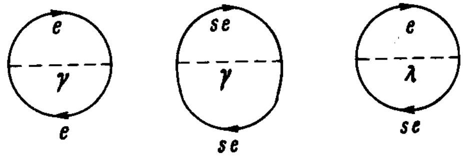
(вычислена петля с киральными суперполями T и U, что отвечает электрону и двум заряженным скалярным частицам). Следовательно,

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{M_0^2}{m_0^2}. \tag{8}$$

Перенормированные заряд α и масса m не должны зависеть от M_0, что фиксирует неявную зависимость от M_0 голых величин, α_0 и m_0. Дифференцируя (8) по $\ln M_0$, приходим к (2).

---

1) Компонентное вычисление двухпетлевой β-функции в СКЭД, конечно же, должно существовать в литературе, однако нам не удалось его найти. Мы проверили результат (4), разработав для этого метод, который весьма прост и эффективен как в суперсимметричных так и в обычных теориях и представляет самостоятельный интерес [7]. В принципе, $\beta^{(2)}$ можно извлечь также из работы [5], где использовалась техника суперграфов.



Обратим внимание на то, что истинно ультрафиолетовый вклад в перенормировку заряда связан с дифференцированием $\ln M_0^2$ в правой части (8) и исчерпывается *одной петлей*. Тем не менее, β-функция (2) не однопетлевая, а содержит все порядки. Вторая и более высокие петли происходят от дифференцирования $\ln m_0^2$ по $\ln M_0$. Таким образом видно, что вычисление β-функции существенным образом связано с инфракрасным доопределением. В этой связи интересно сравнить результат (2) с непосредственным вычислением двухпетлевых графиков в компонентной форме [7].

Если использовать калибровку Фока – Швингера для внешнего фотонного поля (обзор этой техники см. в [9]), то задача тривиализуется. Член $\ln M_0^2 F_{\mu\nu}^{\,2}$ в $S_{\text{эфф}}$ возникает от графиков (см. рисунок), где сплошными линиями обозначены пропагаторы заряженных частиц во внешнем поле. При $m_0 = 0$, т.е. когда импульсы внешнего поля $q \gg m$, расчет этих графиков дает вовсе не ноль, а величину как раз соответствующую значению $\beta^{(2)}$, см. (4). Однако в случае $q \ll m$, т.е. когда добавлен вклад расстояний $x \sim m^{-1}$, двухпетлевой вклад равен нулю, в соответствии с (7). Это означает, что набравшийся на малых расстояниях эффект точно сокращается вкладом больших расстояний.

В заключение, сравним (2) с выражением для β-функции, полученным в неабелевой калибровочной теории с материей в рамках инстантонного исчисления, формула (2) работы [6]. Если опустить в последней ту часть, которая не зависит от присутствия полей материи (т.е. положить $n_g = n_\lambda = 0$) и учесть разницу в определении γ и γ_m и в нормировке зарядов, то вновь воспроизводим соотношение (2).

Авторы благодарны В.Новикову и П.Медведеву за обсуждения.

Литература

1. *Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П.* Письма ЖЭТФ, 1971, **13**, 452; *Volkov D.V., Akulov V.P.* Phys. Lett., 1973, **B46**, 109; *Wess J., Zumino B.* Nucl. Phys., 1974, **B70**, 39.
2. *Zumino B.* Nucl. Phys., 1975, **B89**, 535; *West P.* Nucl. Phys., 1976, **B106**, 219; *Grisaru M., Siegel W., Rocek M.* Nucl. Phys., 1979, **B159**, 429.
3. *Howe P.S., Stelle K.S., Townsend O.K.* Phys. Lett., 1983, **B124**, 55.
4. *Novikov V., Shifman M., Vainshtein A., Zakharov V.* Nucl. Phys., 1983, **B229**, 381.
5. *Grisaru M., Milewski B., Zanon D.* "The structure of UV divergences. ." Utrecht preprint, 1985.
6. *Novikov V., Shifman M., Vainshtein A., Zakharov V.* Preprint ITEP-75, 1985.
7. *Вайнштейн А., Шифман М.* ЯФ, 1985, **42**, 142.
8. *Grisaru M. et al., ref. 2, Gates S.J. et al.* "Superspace" (Benjamin-Cummings, Reading, MA), 1983.
9. *Novikov V., Shifman M., Vainshtein A., Zakharov V.* Fortsch. Phys., 1984, **32**, 585.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
21 июня 1985 г.