Письма в ЖЭТФ, том 65, вып.2, стр.133 - 138 © 1997г. 25 января

ЗАКОН ПЛОЩАДЕЙ ВИЛЬСОНА В ГАЗЕ АБЕЛЕВЫХ МОНОПОЛЕЙ

Б.В.Мартемьянов, С.В.Молодцов

Институт теоретической и экспериментальной физики

117259 Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 октября 1996 г.

После переработки 5 декабря 1996 г.

Рассмотрен газ абелевых монополей с учетом взаимодействия частиц. Вычислено вильсоновское среднее, для которого с учетом дебаевского экранирования получен закон площадей, с коэффициентом "натяжения", пропорциональным плотности монополей.

PACS: 11.15.-q

Настоятельная необходимость поиска реалистической модели вакуума квантовой хромодинамики (КХД) со свойствами нарушения киральной инвариантности (НКИ) и конфайнментом (закон площадей Вильсона) отмечалась в недавнем обзоре [1]. Наиболее изученная модель – инстантонного газа (жидкости) [2] – обладает свойством НКИ, но не дает конфайнмента [3]. Предложенная несколько лет тому назад модель дионного газа [4] является более перспективной в отношении конфайнмента, одновременно обладая свойством НКИ. Проведенные оценки демонстрировали возможность закона площадей для петли Вильсона в газе дионов (монополей). В недавних работах [5, 6] были получены первые количественные результаты для газа дионов (абелевых монополей) без учета взаимодействия частиц. Было показано, что в газе дионов с характерным размером r_{dyon}, много меньшим размера петли r (предел точечных дионов), для пространственной петли Вильсона имеет место "суперконфайнмент" – коэффициент натяжения пропорционален размеру петли (в частности, для окружности радиуса r):

$$\langle W\rangle = \exp(-\sigma r^2), \quad \sigma = C\,nr, \tag{1}$$

где n – плотность газа дионов в трехмерном пространстве, C – извлекаемая из численных расчетов константа, приближенно равная π^2, $C = 9.846...$ Формула (1) справедлива для квазистатических зарядов, когда порождаемые частицами поля берутся без учета запаздывания, вызванного перемещениями частиц в трехмерном пространстве. Учет движения приводит к уменьшению константы C [6]. Кроме того, C изменяется для мультидионных конфигураций, рассматриваемых в контейнере большого, но конечного размера $L \gg r$. Отмечалось, что учет взаимодействия, в частности, экранирование поля заряда в газе, может приводить к интересующей нас коррекции формулы (1) – к закону площадей Вильсона (конфайнменту пространственных петель).

Влияние взаимодействия абелевых монополей (экранирования) на "удерживающие" свойства газа исследуется в настоящей работе. Кроме того, на основе явного вычисления двухчастичной корреляционной функции указана важность учета многочастичных корреляторов в рассматриваемой модели.

Пространственная петля Вильсона для нейтрального газа монополей со взаимодействием. По определению, наблюдаемая петля Вильсона для газа монополей дается пределом среднего по времени, при $T \to \infty$, от парциального вклада $W(C,t)$ для мгновенного расположения зарядов

$$\langle W(C)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T dt W(C,t)}{T}, \tag{2}$$

где

$$W(C,t) = \exp\left(i\frac{g}{2}\oint_C A_\mu(x)dx_\mu\right),$$

C – вильсоновский контур. Применяя эргодическую гипотезу, перепишем определение (2) для N-частичного газа через функцию распределения частиц $F_N(x_1,...,x_N)$:

$$\langle W(C)\rangle = \frac{\int dx_1...dx_N W_N(x_1,...,x_N)F_N(x_1,...,x_N)}{\int dx_1...dx_N F_N(x_1,...,x_N)}. \tag{3}$$

Как показано в работах [5, 6], для невзаимодействующих частиц имеет место суперконфайнмент (1). В газе же частиц с дальнодействием следует рассматривать скоррелированное расположение зарядов – каждую из частиц окружает экранирующее ее облако частиц противоположного заряда. В простейшем случае разреженного (невырожденного) газа дебаевская экранировка описывается с достаточной точностью дебаевским радиусом D как функцией термодинамических параметров: $D = (\Theta/e^2n)^{1/2}$, где e – заряд частицы, Θ – температура газа.

Для абелевого монополя (точечного диона), в частности, имеем следующие магнитные поля: без экранирования

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{g}\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \tag{4}$$

с дебаевской экранировкой

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{g}\nabla\left(\frac{e^{-|\mathbf{x}|/D}}{|\mathbf{x}|}\right); \tag{5}$$

в формуле (2) при этом используется сингулярный дираковский потенциал, например, следующего вида:

$$\mathbf{A}_D = \frac{1}{g}\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho}\frac{z}{[\rho^2+z^2]^{1/2}},$$

ρ – расстояние до дираковской нити, $\mathbf{e}_\varphi$ – единичный азимутальный орт.

Кроме экранирования, взаимодействие сказывается на виде функции распределения, для нахождения которой в разреженном газе вполне приемлемо ограничиться учетом только двухчастичных корреляторов. В частности, для нейтрального монополь-антимонопольного газа в формуле (3) вычисляются средние следующего вида:

$$\int d\mathbf{x}_i d\mathbf{x}_j \left\{ \sum_{i,j=1}^{N_+} W_1^+(\mathbf{x}_i) W_1^+(\mathbf{x}_j) F_{ij}^{++} + \sum_{i=1}^{N_+} \sum_{j=1}^{N_-} W_1^+(\mathbf{x}_i) W_1^-(\mathbf{x}_j) F_{ij}^{+-} + \dots \right\},$$

где $N_+ = N_- = N$ – число монополей (антимонополей). Благодаря коммутативности полей в рассматриваемой модели, вильсоновская петля распадается на произведение одночастичных вкладов $W_2(x_1, x_2) = W_1(x_1) W_1(x_2)$. В пределе $\varepsilon = v/D^3 \ll 1$, где $v = V/N$ – удельный объем, двухчастичная функция известна:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1 - \varepsilon e_1 e_2 \frac{e^{-|x_1 - x_2|/D}}{|x_1 - x_2|/D}; \tag{6}$$

e_1, e_2 – заряды частиц, причем на малых расстояниях вводится обрезание, чтобы избежать нефизических отрицательных значений в случае отталкивания.

Итак, при $N \gg 1$ вместо (3) имеем

$$\langle W \rangle = \left[\int \frac{dx_1 dx_2}{2} \{ W_1^+ W_2^+ F_{12}^{++} + W_1^+ W_2^- F_{12}^{+-} \} \right]^N, \tag{7}$$

потоки магнитного поля через контур для монополя и антимонополя берутся с дебаевской экранировкой (5).

Для того чтобы увидеть, какой из эффектов – дебаевская экранировка или же изменение функции распределения – дает больший вклад в ответ, рассмотрим их по отдельности. Сначала изучим влияние изменения функции распределения на "суперконфайнмент". Для дираковского сингулярного потенциала поток магнитного поля выражается через телесный угол, под которым виден контур из точки расположения заряда Ф. Вещественная часть формулы (7), таким образом, имеет вид

$$\langle W \rangle = \left[\int \frac{dx_1 dx_2}{2} \left\{ \cos\left(\frac{\Phi_1}{2} + \frac{\Phi_2}{2} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{g^2} \frac{e^{-r_{12}/D}}{r_{12}/D} \right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \cos\left(\frac{\Phi_1}{2} - \frac{\Phi_2}{2} \right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{g^2} \frac{e^{-r_{12}/D}}{r_{12}/D} \right) \right\} \right]^N. \tag{8}$$

Без учета взаимодействия [5, 6]

$$\langle W_1 \rangle = \langle \cos(\Phi/2) \rangle \to 1 - C \frac{r^3}{V}, \tag{9}$$

в газе

$$\langle W \rangle \to \left(1 - C \frac{r^3}{V} \right)^N,$$

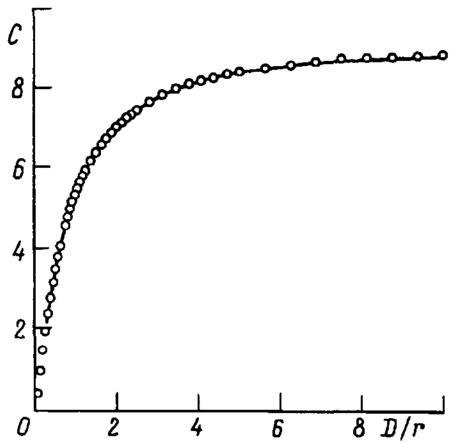
при $N \to \infty$, $V \to \infty$, $N/V = n$

$$\langle W \rangle \to \exp(-Cnr^3).$$

Из формулы (8) видно, что в наиболее значимой части, которая дается произведением $\cos(\Phi/2)$, изменение функции распределения не сказывается. Вклады монополь-монопольных и монополь-антимонопольных пар взаимно компенсируются. Это подтверждается и численным расчетом как с обрезанием функции распределения на коротких расстояниях F_{reg}, так и без него F_2. Коэффициент C в формуле (9) изменяется не сильно:

$$C = 9.115 \ (F_2 = F_1 \ F_1 = 1), \quad C' = 9.011 \ (F_2 = F_{reg}), \quad C'' = 8.269 \ (F_2),$$

(размеры бокса, в котором содержится газ, $L/r = 3.625$, $D/r = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$). Численный счет показывает, что компенсация имеет место в широком диапазоне параметров D, ε, то есть с 10-процентной точностью функцию распределения можно полагать свободной, $F_2 = 1$.



Коэффициент C как функция радиуса Дебая D. Точки – результат вычислений с шагом $h/r = 6.25 \cdot 10^{-2}$, сплошная кривая $h/r = 2.5 \cdot 10^{-1}$

Учет дебаевского экранирования непосредственно в W показан на рисунке, где представлен коэффициент C как функция дебаевского радиуса D (поток магнитного поля определяется с помощью выражения (5), интегрирование потока проводится по минимальной поверхности, натянутой на контур). Видно, что при $D \ll r$ имеется линейная по D зависимость коэффициента C:

$$C = C_D \frac{D}{r}.$$

Из численного счета с очень малым шагом интегрирования получено следующее значение для коэффициента C_D:

$$C_D = 7.9\ldots$$

Отсюда получаем конфайнмент для пространственной петли Вильсона в газе монополей с дебаевским экранированием:

$$\langle W \rangle \to \exp(-\sigma r^2), \qquad \sigma = C_D n D.$$

Коррелятор монополей. Раскладывая $\cos(\Phi/2)$ в ряд по степеням Φ, свяжем вильсоновское среднее с корреляторами полей. Так, первый значимый вклад дается разложением

$$\langle \cos(\Phi/2) \rangle = 1 - \langle \Phi^2 \rangle / 8 + \ldots, \qquad \langle \Phi^2 \rangle = \int_{S \times S} d\sigma_1 d\sigma_2 \langle B_3(x_1) B_3(x_2) \rangle,$$

интегрирование ведется по поверхности окружности S, лежащей в плоскости x, y; $d\sigma$ – элемент поверхности.

Для монополя напряженности B_i имеют кулоновский вид; коррелятор таких полей вычисляется точно

$$\int \frac{d\mathbf{x}}{V} B_i(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1) B_j(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2) = \frac{4\pi}{V|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}\frac{1}{2}(\delta_{ij}-n_i n_j), \quad n = \frac{\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}. \tag{10}$$

Точно вычисляется также и интеграл от коррелятора

$$\int_{S\times S} d\sigma_1 d\sigma_2 \frac{1}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|} = \frac{16\pi}{3} r^3. \tag{11}$$

Таким образом, для вильсоновского среднего имеем приближенный результат

$$\langle W\rangle = \langle \cos(\Phi/2)\rangle \approx 1 - \frac{4\pi^2}{3}\frac{r^3}{V}, \tag{12}$$

или $C \approx 4\pi^2/3$, что с 30-процентной точностью совпадает с полным ответом для C.

В случае экранированных полей (5) коррелятор также вычисляется точно:

$$\int \frac{d\mathbf{x}}{V} B_i(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1) B_j(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2) =$$

$$= \frac{4\pi e^{-|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|/D}}{V|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}\left\{\frac{1}{2}(\delta_{ij}-n_i n_j) - \frac{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}{2D} n_i n_j\right\}. \tag{13}$$

Для интеграла

$$I = \int_{S\times S} d\sigma_1 d\sigma_2 \frac{e^{-|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|/D}}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}$$

при $D \ll r$ можно получить следующую оценку:

$$I = 2\pi^2 D r^2.$$

Для вильсоновского среднего получим

$$\langle W\rangle = \langle \cos(\Phi/2)\rangle \approx 1 - \frac{\pi^3}{2}\frac{Dr^2}{V}, \tag{14}$$

в газе соответственно имеем

$$\langle W\rangle \approx \exp\left(-\frac{\pi^3}{2} D n r^2\right).$$

Полученная оценка для $C_D = \pi^3/2 \approx 15$ заметно отличается от полного значения, что говорит о важной роли многочастичных корреляторов для рассматриваемой модели.

Как уже отмечалось в начале статьи, во многом результаты для газа монополей совпадают с результатами для газа точечных дионов. Если удастся провести аналогию с экранированием в газе монополей, то для дионного газа получится необходимое свойство конфайнмента.

Нами вычислена вильсоновская петля для газа взаимодействующих монополей (дионов). Дебаевское экранирование приводит к закону площадей для вильсоновского среднего. Результат прямого вычисления сравнивается с приближенным аналитическим вычислением по методу корреляционных функций. Показана важность учета многочастичных корреляторов в рассматриваемой задаче.

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований (95-02-05436) и Немецкого научно-исследовательского общества (96-02-00088а).

---

1. Ю.А.Симонов, УФН **166**, 337 (1996).
2. C.G.Callan, R.Dashen, and D.J.Gross, Phys. Rev. **D17**, 2717 (1978). E.V.Shuryak, Nucl. Phys. **B203**, 93, 116, 140 (1982). D.I.Diakonov and V.Yu.Petrov, Nucl. Phys. **B245**, 259 (1984).
3. C.G.Callan, R.Dashen, and D.J.Gross, Phys. Lett. **B66**, 375 (1977). D.I.Diakonov, V.Yu.Petrov, and P.V.Pobylitsa, Phys. Lett. **B226**, 471 (1989). E.V.Shuryak, Nuc. Phys. **B328**, 85, 102 (1980).
4. Ю.А.Симонов, ЯФ **43**, 557 (1985). J.Smit and A.van der Sijs, Nucl. Phys. **B335**, 603 (1991).
5. Б.В.Мартемьянов, С.В.Молодцов, ЯФ **59**, 776 (1996).
6. А.И.Веселов, Б.В.Мартемьянов, С.В.Молодцов, Ю.А.Симонов, ЯФ, 1996 (в печати).