Письма в ЖЭТФ, том 65, вып.5, стр.402 - 404 © 1997г. 10 марта

НОВЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ПОТОКОВЫХ КООРДИНАТ В ТОРОИДАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В.Д.Пустовитов[1)]

Российский научный центр "Курчатовский институт"

123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 февраля 1997 г.

Предлагается универсальный способ введения потоковых координат в тороидальных равновесных плазменных конфигурациях. Его особенность – задание двух скалярных функций, одна из которых определяет явный вид якобиана, и единая форма уравнений для любых потоковых координат. Благодаря этому способ прост, нагляден и эффективен.

PACS: 52.30.Bt, 52.55.Dy

Магнитные поверхности и магнитные (или потоковые) координаты – это фундаментальные понятия, без которых немыслима теория тороидальных систем для удержания термоядерной плазмы. Магнитными называют поверхности a =const, на которых лежат линии магнитного поля **B**. Положение точки на такой поверхности можно задать двумя числами (θ, ζ), тогда (a, θ, ζ) – потоковые координаты.

Привязка координатной системы к магнитным поверхностям существенно облегчает описание равновесной конфигурации, так как по определению $\mathbf{B} \cdot \nabla a = 0$, а кроме того, как следует из уравнения равновесия

$$\nabla p = \mathbf{j} \cdot \mathbf{B}, \tag{1}$$

на этих поверхностях лежат и линии тока $\mathbf{j} = \mathrm{rot}\mathbf{B}$, а давление плазмы p постоянно.

Очевидно, "радиальная" координата a и угловые координаты θ, ζ неравноценны. Первая определяется физикой задачи, будучи жестко связанной с формой магнитных поверхностей. Построение же координатной сетки (θ, ζ) на этих поверхностях – формальная математическая процедура, допускающая большой произвол. Поэтому неизбежно возникает вопрос, как наилучшим образом воспользоваться свободой выбора θ и ζ.

Для ответа обычно обращаются к общему выражению для магнитного поля в потоковых координатах [1,2]

$$2\pi \mathbf{B} = \nabla\psi \cdot \nabla\zeta + \nabla\Phi \cdot \nabla\theta + \nabla a \cdot \nabla\eta, \tag{2}$$

где $\psi(a)$ и $\Phi(a)$ – полоидальный и тороидальный магнитные потоки, а η – некая дважды периодическая функция, которая зависит от способа задания θ и ζ. Считается естественным одну из двух степеней свободы употребить на то, чтобы сделать $\eta = 0$. При этом силовая линия на плоскости θ, ζ становится прямой. Соответственно переменные (a, θ, ζ) с $\eta = 0$ называют координатами с выпрямленными силовыми линиями (ВСЛ). Иные координаты в теории плазмы используются крайне редко, и из однопараметрического семейства координат

[1)] e-mail: pustovit@qq.nfi.kiae.su

с ВСЛ только три варианта получили широкое признание: координаты с заданным ζ, координаты Хамады [3] и координаты Бузера [4]. Традиционно при их построении решаются уравнения, в которых изначально учтены желаемые свойства координат. В каждом из трех случаев эти уравнения выглядят по разному. Есть общая теория [5,6], объясняющая принципы построения систем с ВСЛ и переходы от одной к другой. Но при всей ее строгости и кажущейся полноте в ней нет уравнений, по которым с одного взгляда можно было бы увидеть все возможности выбора θ и ζ, преимущества и недостатки разных вариантов, моментально оценить степень сходства и отличия одних координат от других. Цель настоящей работы – сформулировать такие уравнения, причем для общего случая, а не только для координат с ВСЛ.

Кроме (2), для этого потребуется всего лишь простое выражение

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = \frac{4\pi^2}{V'}\frac{f}{<f>} \tag{3}$$

для якобиана $\sqrt{g} = ((\nabla a \cdot \nabla\theta)\cdot\nabla\zeta)^{-1}$, которое является тривиальным следствием определения операции усреднения по слою между близкими магнитными поверхностями:

$$<X> = \frac{d}{dV}\int\limits_V X d^3\mathbf{r} = \frac{1}{V'}\int X\sqrt{g}d\theta d\zeta. \tag{4}$$

Здесь V – объем тора a=const, штрихом обозначена производная по a.

После того, как оно написано, равенство (3) кажется очевидным, но малоинформативным или даже бесполезным – ведь f в (3), как и η в (2), неизвестна. Но если, до конца следуя логике введения координат с ВСЛ, считать обе эти функции известными (и совсем не обязательно $\eta = 0$), то с его помощью мы придем к удивительно простому и в высшей степени наглядному способу построения потоковых координат с желаемыми свойствами.

Если задавать f и η, то θ и ζ должны считаться неизвестными. Из (2) и (3) получаем для θ

$$(2\pi\mathbf{B} - \nabla a\cdot\nabla\eta)\cdot\nabla\theta = -4\pi^2\frac{\psi'}{V'}\cdot\frac{f}{<f>}. \tag{5}$$

Точно так же можно записать и уравнение для ζ, только в правой части нужно заменить $-\psi'$ на Φ'. Но еще изящней в паре с (5) выглядит

$$(2\pi\mathbf{B} - \nabla a\nabla\eta)\cdot\nabla(\zeta - q\theta) = 0, \tag{6}$$

где $q = -\Phi'/\psi'$ – запас устойчивости. Эти два уравнения вместе с (3) и являются нашей целью. В них явно показано, что может дать свобода выбора θ и ζ, которая трансформировалась здесь в свободу выбора η и f: можно изменять вид оператора в левой части (5) и (6) и можно независимо менять вид $\sqrt{g}$. И ничего более. Иных доказательств этого, кроме (3), (5), (6), очевидно, не требуется.

Общие уравнения (3), (5), (6) позволяют рассматривать все потоковые системы координат в рамках единого подхода и легко переходить от одной системы к другой, меняя η и f. Например, в семействе координат с ВСЛ ($\eta = 0, f$ произвольна) при $f = 1$ получим координаты Хамады, при $f = \mathbf{B}^2$ –

координаты Бузера, а $f = \mathbf{B}\cdot\nabla\zeta$ соответствует координатам с ВСЛ с заданным ζ.

Координаты Хамады и Бузера всегда так и вводятся: полагают $\eta = 0$ и задают явный вид $\sqrt{g}$. Но в "старой" теории требуется немалая работа, чтобы установить связь этих координат [5–7], а наше уравнение (5) решает эту задачу сразу. Кроме того, предлагаемый метод применим для любых координат.

Для координат же с заданным ζ стандартная процедура иная: в качестве ζ выбирают обычный тороидальный угол либо приведенную к 2π длину геометрической оси, а затем ищут θ при условии $\eta = 0$. При этом расчет $\sqrt{g}$ выливается в отдельную задачу [5,8]. В нашем же случае все предельно просто – явный вид $\sqrt{g}$ задается. Здесь, правда, возникает вопрос, можно ли, имея всего две степени свободы, брать в качестве исходных не две, а три функции – ζ, $\eta = 0$ и $f = \mathbf{B}\cdot\nabla\zeta$. Оказывается, можно, потому что при $f = \mathbf{B}\cdot\nabla\zeta$ уравнение (6) после подстановки $\mathbf{B}\cdot\nabla\theta$ из (5) превращается в тождество. Тем самым ограничения на ζ снимаются, ζ может быть произвольным, в том числе и обычным тороидальным углом.

Уравнения (3), (5) и (6) позволяют сконструировать и любую другую удобную систему координат. Например, с теми же $\sqrt{g}$, что и у координат Хамады или Бузера, но без ВСЛ, а с каким-нибудь иным полезным свойством. С уравнениями (3), (5), (6) изобретение новых координат становится чрезвычайно простым занятием.

Уравнение типа (5) могло быть сформулировано и без (3), но именно незамечавшаяся ранее возможность представления $1/\sqrt{g}$ в виде (3) позволяет наилучшим образом "материализовать" свободу выбора θ и ζ. Следует отметить, что только такое выражение $1/\sqrt{g}$ через другую неизвестную функцию f позволяет считать f настоящим "свободным параметром", что и является главным достоинством предлагаемого метода. Действительно, если бы вместо $f/<f>$ в (3) фигурировала некая h, то для нее из (4) следовало бы ограничение $<h> = 1$. Общая теория [5,6] подсказывает, что $h = 1 + \mathbf{B}\cdot\nabla\chi$. Появившаяся здесь новая функция χ находится под оператором $\mathbf{B}\cdot\nabla$, к тому же $\mathbf{B}\cdot\nabla\chi$ должно быть безразмерным, так что простота и наглядность построения координат при задании χ теряются. Но в нашем случае ни нормировка, ни размерность f не имеют значения, поскольку в (3), (5) входит только $f/<f>$.

Автор благодарен профессору Y.H.Ichikawa (Chubu University, Japan; Committee for Promotion of Japan-FSU Science Collaboration) за поддержку.

---

1. M.D.Kruskal and R.M.Kulsrud, Phys. Fluids **1**, 265 (1958).
2. J.M.Greene and J.L.Johnson, Phys. Fluids **5**, 510 (1962).
3. S.Hamada, Nuclear Fusion **2**, 23 (1962).
4. A.H.Booser, Phys. Fluids **24**, 1999 (1981).
5. В.Д.Пустовитов, В.Д.Шафранов, В сб. *Вопросы теории плазмы.* Под ред. Б.Б.Кадомцева, М.: Энергоатомиздат, 1987, с.146.
6. W.D.D'haeseleer, W.N.G.Hitchon, J.D.Callen, and J.L.Shohet, *Flux coordinates and magnetic field structure. A guide to a fundamental tool of plasma theory,* Berlin: Springer-Verlag, 1991.
7. N.Nakajima, J.Todoroki, and M.Okamoto, Kakuyugo Kenkyu **68**, 395 (1992). См. также NIFS report NIFS-173, Nagoya, 1992.
8. А.Б.Михайловский, *Неустойчивость плазмы в магнитных ловушках,* М.: Атомиздат, 1978.